

**А.Н. ТИХОНОВ  
А.В. ГОНЧАРСКИЙ  
В.В. СТЕПАНОВ  
А.Г. ЯГОЛА**

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ**



**МОСКВА "НАУКА"  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1990**

ББК 22.193  
Т46  
УДК 519.6

Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. **Численные методы решения некорректных задач.** — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 232 с. ISBN 5-02-014135-6.

При обработке данных физического эксперимента часто возникает необходимость решения на ЭВМ неустойчивых по отношению к погрешностям эксперимента так называемых некорректно поставленных задач. В книге дается изложение теории и численных методов решения некорректных задач при различной априорной информации об искомом решении. Приводятся тексты на языке фортран большого комплекса программ решения интегральных уравнений 1-го рода.

Для студентов и аспирантов физико-математических и других естественнонаучных специальностей, а также для инженеров и научных работников, интересующихся вопросами обработки и интерпретации данных эксперимента.

Ил. 104. Библиогр. 220 назв.

Рецензент академик *М.М. Лаврентьев*

Т  $\frac{1602120000 - 095}{053(02)-90}$  37-90

ISBN 5-02-014135-6

© "Наука". Физматлит, 1990

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	5
<b>Глава I</b>	
<b>Методы регуляризации</b> .....	10
§ 1. Постановка задачи. Сглаживающий функционал .....	10
§ 2. Выбор параметра регуляризации .....	11
§ 3. Эквивалентность обобщенного принципа и обобщенного метода невязки .....	19
§ 4. Обобщенная невязка и ее свойства .....	22
§ 5. Конечномерная аппроксимация некорректных задач .....	31
§ 6. Численные методы решения некоторых задач линейной алгебры .....	35
§ 7. Уравнения типа свертки .....	38
§ 8. Нелинейные некорректно поставленные задачи .....	48
§ 9. Несовместные некорректные задачи .....	55
<b>Глава II</b>	
<b>Численные методы приближенного решения некорректных задач на компактных множествах</b> .....	68
§ 1. О приближенном решении некорректных задач на компактных множествах .....	69
§ 2. Некоторые теоремы о равномерном приближении к точному решению некорректно поставленных задач .....	70
§ 3. Некоторые теоремы о выпуклых многогранниках в $\mathbb{R}^n$ .....	73
§ 4. О решении некорректно поставленных задач на множествах выпуклых функций .....	79
§ 5. О равномерном приближении решений с ограниченной вариацией .....	80
<b>Глава III</b>	
<b>Алгоритмы приближенного решения некорректно поставленных задач на специальных множествах</b> .....	85
§ 1. Применение метода условного градиента для решения задач на специальных множествах .....	85
§ 2. Применение метода проекций сопряженных градиентов для решения некорректно поставленных задач на множествах специальной структуры .....	92
§ 3. Применение метода проекций сопряженных градиентов с проецированием на множество векторов с неотрицательными компонентами для решения некорректно поставленных задач на множествах специальной структуры .....	97

Алгоритмы и программы решения линейных некорректно поставленных задач . . . . .	101
§ 1. Описание программ решения некорректно поставленных задач методом регуляризации . . . . .	104
§ 2. Описание программы решения интегральных уравнений с априорными ограничениями методом регуляризации . . . . .	118
§ 3. Описание программы решения интегрального уравнения типа свертки . . . . .	123
§ 4. Описание программы решения двумерных интегральных уравнений типа свертки . . . . .	130
§ 5. Описание программ решения некорректно поставленных задач на специальных множествах. Метод условного градиента . . . . .	136
§ 6. Описание программы решения некорректно поставленных задач на специальных множествах. Метод проекций сопряженных градиентов . . . . .	142
§ 7. Описание программы решения некорректно поставленных задач на специальных множествах. Метод сопряженных градиентов с проецированием на множество векторов с неотрицательными компонентами . . . . .	148
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>157</b>
I. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода методом Тихонова с преобразованием уравнений Эйлера к трехдиагональному виду . . . . .	157
II. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода методом Тихонова с использованием метода сопряженных градиентов . . . . .	169
III. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множестве неотрицательных функций методом регуляризации . . . . .	174
IV. Программа решения одномерных интегральных уравнений типа свертки . . . . .	178
V. Программа решения двумерных интегральных уравнений типа свертки . . . . .	185
VI. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множествах монотонных и (или) выпуклых функций. Метод условного градиента . . . . .	192
VII. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множествах монотонных и (или) выпуклых функций. Метод проекции сопряженных градиентов . . . . .	196
VIII. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множествах монотонных и (или) выпуклых функций. Метод проекций сопряженных градиентов на множество векторов с неотрицательными координатами . . . . .	206
IX. Общие программы . . . . .	212
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>218</b>



С точки зрения современной математики все задачи принято условно делить на корректно и некорректно поставленные.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (\text{B.1})$$

где  $Z, U$  – метрические пространства. Согласно Адамару [213] задача (B.1) называется *корректной*, или *корректно поставленной*, если выполнены два условия:

а) уравнение (B.1) разрешимо для любого  $u \in U$  единственным образом;

б) решение уравнения (B.1) устойчиво относительно возмущения правой части уравнения, т.е. оператор  $A^{-1}$  определен на всем  $U$  и является непрерывным.

Типичным примером некорректно поставленной задачи является линейное операторное уравнение (B.1) в случае, когда оператор  $A$  вполне непрерывен. В этом случае, как известно, нарушаются оба условия корректности задачи по Адамару. Если  $Z$  – бесконечномерное пространство, то, во-первых, оператор  $A^{-1}$  определен не на всем  $U$  ( $AZ \neq U$ ) и, во-вторых,  $A^{-1}$  (определенный на  $AZ \subset U$ ) не является непрерывным.

К некорректно поставленным задачам относятся многие задачи теории оптимального управления, линейной алгебры, задача суммирования рядов Фурье с неточно заданными коэффициентами, задача минимизации функционалов и многие другие.

Теория и методы решения некорректных задач получили интенсивное развитие после выхода в свет основополагающих работ [164–166]. Важнейшим открытием было введенное в [166] понятие приближенного решения некорректных задач. В основе новой постановки лежит понятие регуляризирующего алгоритма (РА) как способа приближенного решения некорректной задачи.

Рассмотрим следующую абстрактную задачу. Даны метрические пространства  $X$  и  $Y$  и отображение  $G: X \rightarrow Y$ , заданное на подмножестве  $D_G \subset X$ . Необходимо по элементу  $x \in D_G$  найти его образ  $G(x) \in Y$ . Если вернуться к задаче (B.1), то в новых терминах  $G = A^{-1}$ ,  $X = U$ ,  $Y = Z$  и задача состоит в вычислении оператора  $A^{-1}$ . Роль  $D_G$  в этом случае играет  $D_G = AZ \subset U$ .

Отображение  $G$  может играть роль оператора, переводящего множество данных какой-либо экстремальной задачи в элемент, на котором достигается экстремум, и т.п.

Если отображение  $G$  определено на всех  $X$  и непрерывно, то рассматриваемая задача корректна по Адамару (корректно поставлена). В этом случае если вместо элемента  $\bar{x} \in D_G$  известно его приближенное значение — элемент  $x_\delta \in X$  такой, что  $\rho_X(x_\delta, \bar{x}) \leq \delta$ , то в качестве приближенного значения элемента  $\bar{y} = G(\bar{x})$  можно взять элемент  $G(x_\delta) \in Y$ , причем  $\rho_Y(G(x_\delta), \bar{y}) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Если задача некорректно поставлена, то элемент  $G(x_\delta)$  может вовсе не существовать, так как  $x_\delta$  не обязательно принадлежит  $D_G$ , а если и принадлежит, то  $\rho_Y(G(x_\delta), \bar{y})$ , вообще говоря, не стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ .

Таким образом, рассматриваемую проблему можно трактовать как задачу о приближенном вычислении значения абстрактной функции  $G(x)$  при неточно заданном аргументе  $x$ . Понятие неточно заданного аргумента нуждается в определении. Под приближенными данными  $\bar{x}$  будем понимать пару  $(x_\delta, \delta)$  такую, что  $\rho_X(x_\delta, \bar{x}) \leq \delta$ , причем элемент  $x_\delta$  не обязательно принадлежит  $D_G$ .

Фундаментальным понятием теории решения некорректных задач является понятие регуляризирующего алгоритма как способа приближенного решения некорректной задачи. Введем в рассмотрение оператор  $R$ , определенный на паре  $(x_\delta, \delta)$ ,  $x_\delta \in X$ ,  $0 < \delta \leq \delta_0$ , с областью значений в пространстве  $Y$ . Можно использовать другое обозначение для оператора  $R$ , а именно  $R(x_\delta, \delta) = R_\delta(x_\delta)$ , т.е. будем говорить о параметрических семействах операторов  $R_\delta(x)$ , определенных на всем  $X$  с областью значения в  $Y$ . Введем в рассмотрение погрешность

$$\Delta(R_\delta, \delta, \bar{x}) = \sup_{x_\delta \in X} \rho_Y(R_\delta(x_\delta), G(\bar{x})).$$

$$\rho_X(x_\delta, \bar{x}) \leq \delta$$

**О п р е д е л е н и е.** Функция  $G$  называется *регуляризуемой на  $D_G$* , если существует отображение  $R(x, \delta) = R_\delta(x)$ , действующее из прямого произведения пространств  $X$  и  $\{\delta\}$ , такое, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta(R_\delta, \delta, x) = 0$$

для любых  $x \in D_G$ . Сам оператор  $R(x, \delta)$  ( $R_\delta(x)$ ) называется *регуляризирующим оператором* (регуляризирующим семейством операторов).

Абстрактная постановка задачи, предложенная в следующем разделе, включает различные некорректные задачи (решение операторных уравнений, задачи минимизации функционалов и т.п.). Понятие регуляризуемости распространяется на все эти задачи. Так, задача (В.1) будет называться регуляризуемой, если оператор  $A^{-1}$  регуляризуем на области своего определения  $AZ \subset U$ . В этом случае существует оператор  $R$ , который каждой паре  $u_\delta \in U$  и  $\delta > 0$  ставит в соответствие элемент  $z_\delta = R(u_\delta, \delta)$  такой, что  $z_\delta \xrightarrow{Z} \bar{z}$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

В теории регуляризации существенно, что приближение к  $G(\bar{x})$  строится с использованием пары  $(x_\delta, \delta)$ .

Ясно, что при построении приближенного решения нельзя использовать тройку  $(x_\delta, \delta, \bar{x})$ , так как точное значение  $\bar{x}$  неизвестно. Возникает вопрос о возможности построения приближенного решения только по значению

$x_\delta$  (погрешность  $\delta$  неизвестна, но известно, что  $\rho_X(x_\delta, \bar{x}) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ ). Следующее утверждение показывает, что это возможно только для задач, по существу являющихся корректными.

Отображение  $G$  регуляризуемо на  $D_G$  семейством  $R_\delta = R(\cdot, \delta) = R(\cdot)$  тогда и только тогда, когда  $G(x)$  продолжается на все  $X$ , причем это продолжение непрерывно на  $D_G$  в  $X$  (см. [16]).

Последнее означает, что для некорректной задачи (B.1) (например, пусть в (B.1) оператор  $A$  взаимно однозначен из  $Z$  в  $U$  и вполне непрерывен) отображение  $G = A^{-1}$  не может быть продолжено на все пространство  $U$  с множества  $D_G = AZ \subset U$  так, чтобы оно было непрерывно на  $D_G$ , поскольку оператор  $A^{-1}$  не является непрерывным. Это значит, что в указанной задаче регуляризация при помощи оператора  $R(\cdot)$ , не зависящего от  $\delta$ , невозможна.

Таким образом, пара  $(x_\delta, \delta)$  является, вообще говоря, той минимальной информацией, которая необходима для построения приближенного решения некорректных задач. Соответственно для задачи (B.1) минимальной информацией является пара  $(x_\delta, \delta)$ .

Зададимся следующим вопросом: насколько широк круг задач, которые допускают построение регуляризирующего семейства отображений, т.е. постараемся описать круг задач, регуляризуемых по Тихонову. Очевидно, что множество таких задач не пусто, так как для любой корректной задачи в качестве регуляризирующего семейства можно взять  $R_\delta = G$ . На этом факте по сути дела основана вся классическая вычислительная математика. Регуляризуемыми являются не только корректные, но и значительная часть некорректных задач. Так, например, если в уравнении (B.1) оператор  $A$  линеен, непрерывен и инъективен, а  $Z$  и  $U$  — гильбертовы пространства, то такая задача регуляризуема.

Этот результат является основным результатом главы I. Более того, в первой главе будут предложены конструктивные методы построения регуляризирующих алгоритмов для задачи (B.1) в случае, когда с погрешностью задана не только правая часть уравнения, но и сам оператор. Пусть заданы элементы  $u_\delta$  и линейный оператор  $A_h$  такие, что  $\|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq \delta$ ,  $\|A_h - A\| \leq h$ . Таким образом, входной информацией является набор  $\{u_\delta, A_h, \delta, h\}$ . По этим данным требуется построить элемент  $z_\eta \in Z$ ,  $\eta = \{\delta, h\}$  такой, что  $z_\eta \xrightarrow{Z} \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Для решения этой задачи широко используется следующая конструкция. Рассмотрим функционал

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_U^2 + \alpha \|z\|_Z^2. \quad (\text{B.2})$$

Пусть  $z_\eta^\alpha$  — экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$ , т.е. элемент, минимизирующий  $M^\alpha[z]$  на  $Z$ . Если параметр регуляризации  $\alpha = \alpha(\eta)$  согласован определенным образом  $\eta = \{\delta, h\}$ , то элемент  $z_\eta^{\alpha(\eta)}$  и будет в определенном смысле решением задачи (B.1).

В главе I подробно обсуждаются способы согласования параметра регуляризации  $\alpha$  с погрешностью задания входной информации  $\eta$ . Заметим сразу, что если пытаться строить приближенные решения так, чтобы  $\alpha$  не являлось функцией от погрешности  $\eta$ , то последнее эквивалентно попытке построить регуляризатор  $R(\cdot, \eta) = R(\cdot)$ , что, как мы уже знаем, возможно лишь для корректных задач.

В главе I подробно обсуждаются априорные схемы выбора параметра регуляризации, впервые предложенные в работе [165].

Особый интерес для практики представляет схема выбора параметра регуляризации по обобщенной невязке [58, 185]. В монографии подробно изложены методы решения несовместных уравнений.

Значительное место в главе I отведено проблемам конечно-разностной аппроксимации и численным методам решения полученных после аппроксимации систем линейных уравнений. Особое внимание уделено современным методам решения интегральных уравнений типа свертки. Регуляризирующие алгоритмы решения уравнений от разности аргументов нашли широкое применение в задачах обработки изображений, компьютерной томографии и т.п. [183, 184].

Построение регуляризирующих алгоритмов основано на использовании дополнительной априорной информации об искомом решении. Особенно просто эта задача решается, если есть информация о принадлежности искомого решения компактному классу [185]. Как показано в главе II, этой информации вполне достаточно, чтобы построить регуляризирующий алгоритм.

Более того, в этом случае оказывается возможным построить не только приближенное решение (B.1)  $z_\delta$  такое, что  $z_\delta \xrightarrow{Z} \bar{z}$  при  $\delta \rightarrow 0$ , но и получить оценку точности приближения, т.е. указать  $\epsilon(\delta)$ , для которого  $\|z_\delta - \bar{z}\|_Z \leq \epsilon(\delta)$ , причем  $\epsilon(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Вопрос об оценке погрешности решения задачи (B.1) непрост.

Пусть

$$\Delta(R_\delta, \delta, \bar{z}) = \sup_{u_\delta: \|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq \delta} \rho_Z(R_\delta(u_\delta), \bar{z})$$

— погрешность решения некорректной задачи (B.1) в точке  $\bar{z}$  при помощи алгоритма  $R_\delta$ . Оказывается, что если задача (B.1) регуляризируема непрерывными отображениями  $R_\delta$  и существует равномерная на множестве  $D$  оценка погрешности

$$\sup_{\bar{z} \in D} \Delta(R_\delta, \delta, \bar{z}) \leq \epsilon(\delta) \rightarrow 0,$$

то сужение оператора  $A^{-1}$  на множество  $AD \subset U$  непрерывно на  $AD \subset U$  [16]. Последнее утверждение не дает возможности построить погрешность решения некорректной задачи на всем пространстве  $Z$ .

Однако если  $D$  компакт, то обратный оператор  $A^{-1}$ , определенный на  $AD \subset U$ , непрерывен, что и позволяет находить вместе с приближенным решением его погрешность.

Следующий важный вопрос, который обсуждается в главе II — это вопрос о том, как в конкретной задаче, используя априорную информацию об искомом решении задачи, выделять компактное множество корректности  $M$ .

В целом ряде обратных задач математической физики имеется качественная информация об искомом решении обратной задачи, такая, как монотонность искомых функций, их выпуклость и т.п. [71]. Как показано в главе II, этой информации достаточно, чтобы на ее основании построить PA решения некорректной задачи (1.1) [74].

Следующая проблема, решаемая в главе II, – как построить эффективные численные алгоритмы решения некорректных задач на выделенном множестве корректности  $M$ . В перечисленных выше случаях задача построения приближенного решения сводится к решению задач выпуклого программирования. Используя специфику ограничений, можно построить эффективные алгоритмы решения некорректных задач на компактных множествах.

Необходимо отметить, что хотя для построения регуляризирующих алгоритмов в монографии широко используются итерационные методы, мы не касаемся проблем итеративной регуляризации, которая представляет самостоятельное большое направление в теории регуляризации. Этому направлению посвящено несколько монографий, в том числе [16, 31].

В главе III подробно обсуждаются численные аспекты построения эффективных регуляризирующих алгоритмов на специальных множествах. Алгоритмы решений некорректных задач на множествах специальной структуры (используется информация о монотонности искомого решения, его выпуклости, существования конечного числа точек перегиба и т.п.) получили широкое распространение в решении некорректных задач диагностики и проектирования [51, 52, 183].

В главе IV приведено описание пакета программ решения некорректных задач. Среди приведенных программ содержатся:

а) различные варианты решения линейных интегральных уравнений первого типа (B.1), основанные на использовании схемы Тихонова;

б) специальные программы решения одномерных и двумерных интегральных уравнений 1-го рода типа свертки с использованием быстрого преобразования Фурье;

в) различные варианты решения одномерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множествах монотонных, выпуклых функций, функций, имеющих заданное число экстремумов, точек перегиба и т.п.

Каждая программа снабжена тестовыми примерами. Глава V содержит тексты программ.

Книга предназначена для студентов и аспирантов физико-математических специальностей, а также для инженеров и научных работников, интересующихся вопросами обработки и интерпретации данных эксперимента.

В настоящей главе рассмотрим методы решения некорректно поставленных задач при условии, что априорной информации, вообще говоря, недостаточно для выделения компактного множества корректности. Основные идеи этой главы были высказаны в работах [165, 166]. Мы будем рассматривать случай, когда оператор также задается приближенно, а множество ограничений задачи – выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Случай точно заданного оператора и случай отсутствия ограничений (т.е. множество ограничений совпадает со всем пространством) являются частными случаями рассмотренной постановки задачи.

### § 1. Постановка задачи. Сглаживающий функционал

Пусть  $Z, U$  – гильбертовы пространства;  $D$  – такое замкнутое выпуклое множество априорных ограничений задачи ( $D \subseteq Z$ ), что  $0 \in D$  (в частности, если рассматривается задача без ограничений, то  $D = Z$ );  $A, A_h$  – линейные ограниченные операторы, действующие из  $Z$  в  $U$ , причем  $\|A - A_h\| \leq h, h \geq 0$ . Построим приближенное решение уравнения

$$Az = u, \quad (1)$$

принадлежащее множеству  $D$ , по заданному набору данных  $\{A_h, u_\delta, \eta\}$ ,  $\eta = (\delta, h)$ , где  $\delta > 0$  – погрешность задания правой части уравнения (1)  $u_\delta$ , т.е.  $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta, \bar{u} = A\bar{z}$ . Здесь  $\bar{z}$  – точное решение (1),  $\bar{z} \in D$ , соответствующее правой части  $\bar{u}$ . Введем *сглаживающий функционал* [165]

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha \|z\|^2 \quad (2)$$

( $\alpha > 0$  – параметр регуляризации) и рассмотрим экстремальную задачу: найти

$$\inf_{z \in D} M^\alpha[z]. \quad (3)$$

**Л е м м а 1.** Для любых  $\alpha > 0, u_\delta \in U$  и линейного ограниченного оператора  $A_h$  задача (3) разрешима и имеет единственное решение  $z_\eta^\alpha \in D$ , причем

$$\|z_\eta^\alpha\| \leq \|u_\delta\|/\sqrt{\alpha}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Очевидно, что функционал  $M^\alpha[z]$  дважды дифференцируем по Фреше, причем

$$(M^\alpha[z])' = 2(A_h^* A_h z + A_h^* u_\delta + \alpha z),$$

$$(M^\alpha[z])'' = 2(A_h^* A_h + \alpha E)$$

( $A_h^*: U \rightarrow Z$  — оператор, сопряженный к  $A_h$ ). Для любого  $z \in Z$   $((M^\alpha[z])''z, z) \geq 2\alpha \|z\|^2$ , поэтому функционал  $M^\alpha[z]$  является сильно выпуклым; следовательно, он достигает минимума на любом замкнутом (не обязательно ограниченном) множестве  $D \subseteq Z$  в единственной точке  $z_\eta^\alpha$  [33].

Поскольку  $0 \in D$ , то

$$\inf_{z \in D} M^\alpha[z] \leq M^\alpha[0],$$

откуда следует оценка (4).

Функционал  $M^\alpha[z]$  является сильно выпуклым функционалом в гильбертовом пространстве [27]. Для отыскания экстремали  $z_\eta^\alpha \in D$  при фиксированном  $\alpha > 0$  достаточно применить, например, градиентные методы минимизации функционалов с ограничениями или без ограничений, если  $D = Z$  [33].

Напомним, что необходимым и достаточным условием того, что  $z_\eta^\alpha$  — точка минимума  $M^\alpha[z]$  на  $D$ , является условие [76]

$$((M^\alpha[z_\eta^\alpha])', z - z_\eta^\alpha) \geq 0 \quad \forall z \in D.$$

Если  $z_\eta^\alpha$  — внутренняя точка  $D$  (или  $D = Z$ ), то это условие принимает вид  $(M^\alpha[z_\eta^\alpha])' = 0$ , или

$$A_h^* A_h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha = A_h^* u_\delta. \quad (5)$$

Таким образом, в этом случае вместо минимизации функционала  $M^\alpha[z]$  можно решать уравнение Эйлера (5). Численные аспекты реализации обоих подходов будут рассмотрены ниже.

## § 2. Выбор параметра регуляризации

Идея построения регуляризирующего алгоритма на основе экстремальной задачи (3) для функционала  $M^\alpha[z]$  заключается в построении такой функции  $\alpha = \alpha(\eta)$ , что  $z_\eta^{\alpha(\eta)} \rightarrow \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ , или, другими словами, в согласовании параметра регуляризации  $\alpha$  с погрешностью задания входных данных  $\eta$ .

**Теорема 1** [165, 166, 169, 170]. Пусть  $A$  — взаимно однозначный оператор,  $\bar{z} \in D$ . Тогда  $z_\eta^{\alpha(\eta)} \rightarrow \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ , если  $\alpha(\eta) \rightarrow 0$  таким образом, что  $(h + \delta)^2 / \alpha(\eta) \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е.  $z_\eta^{\alpha(\eta)} \not\rightarrow \bar{z}$ . Это означает, что существуют такое  $\epsilon > 0$  и такая последовательность  $\eta_k \rightarrow 0$ , что  $\|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - \bar{z}\| \geq \epsilon$ . Поскольку  $\bar{z} \in D$ , то для любого  $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} M^\alpha[z_\eta^\alpha] &= \inf_{z \in D} M^\alpha[z] \leq M^\alpha[\bar{z}] = \|A_h \bar{z} - u_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{z}\|^2 = \\ &= \|A_h \bar{z} - A \bar{z} + \bar{u} - u_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{z}\|^2 \leq (h \|\bar{z}\| + \delta)^2 + \alpha \|\bar{z}\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|z_{\eta}^{\alpha}\|^2 \leq (h \|\bar{z}\| + \delta)^2 / \alpha + \|\bar{z}\|^2. \quad (6)$$

В силу условий теоремы существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\eta$  при  $\delta \leq \delta_0$ ,  $h \leq h_0$  ( $\delta_0 > 0$ ,  $h_0 > 0$  — некоторые положительные числа), что

$$(h \|\bar{z}\| + \delta)^2 / \alpha(\eta) \leq C.$$

Далее, используя слабую компактность шара в гильбертовом пространстве [92], из последовательности  $z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}$  можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к  $z^* \in D$  (поскольку  $D$  слабо замкнуто). Не ограничивая общности, будем считать, что

$z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} \xrightarrow{сл} z^*$ . Используя слабую полунепрерывность снизу нормы [123], условие  $(h + \delta)^2 / \alpha(\eta) \rightarrow 0$ , и неравенство (6) легко получить:

$$\|z^*\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| \leq \|\bar{z}\|. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} \|Az_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - A\bar{z}\| &\leq \|Az_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - A_{h_k}z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| + \\ &+ \|A_{h_k}z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - u_{\delta_k}\| + \|u_{\delta_k} - \bar{u}\| \leq \\ &\leq h_k \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| + \|A_{h_k}z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - u_{\delta_k}\| + \delta_k \leq \\ &\leq h_k(C + \|\bar{z}\|^2)^{1/2} + ((h_k \|\bar{z}\| + \delta_k)^2 + \alpha(\eta_k) \|\bar{z}\|^2)^{1/2} + \delta_k. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , используя условие  $\alpha(\eta_k) \rightarrow 0$  и слабую полунепрерывность снизу функционала  $\|Az - A\bar{z}\|$ , получим  $\|Az^* - A\bar{z}\| = 0$ , т.е.  $z^* = \bar{z}$  в силу взаимной однозначности  $A$ . Тогда из (7) следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| = \|\bar{z}\|$ . Гильбертово пространство

обладает  $H$ -свойством (из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость [95]), поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} = \bar{z}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

**З а м е ч а н и е.** Пусть  $A$  не является взаимно однозначным оператором. Определим нормальное решение  $\bar{z}$  уравнения (1) на множестве  $D$ , соответствующее правой части  $\bar{u} = A\bar{z}$ , как решение экстремальной задачи

$$\|\bar{z}\|^2 = \inf \|z\|^2, \quad z \in \{z: z \in D, Az = \bar{u}\}.$$

Множество  $\{z: z \in D, Az = \bar{u}\}$  выпукло и замкнуто, функционал  $f(z) = \|z\|^2$  сильно выпуклый; следовательно, нормальное решение  $\bar{z} \in D$  существует и единственно [33].

Если в формулировке теоремы 1 отказаться от требования взаимной однозначности оператора  $A$ , то ее утверждение остается справедливым, если считать, что  $\bar{z}$  — нормальное решение уравнения (1). Таким



образом, в этом случае  $z_{\eta}^{\alpha(\eta)} \rightarrow \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ , где  $\bar{z}$  — решение уравнения (1) с минимальной нормой.

Теорема 1 указывает порядок убывания  $\alpha(\eta)$ , достаточный для построения регуляризирующего алгоритма. Обычно при обработке реальных экспериментальных данных уровень погрешности  $\eta$  фиксирован и известен. Ниже будет рассмотрен подход, позволяющий использовать для построения устойчивых приближенных решений уравнения (1) фиксированные значения погрешности задания исходных данных.

Определим меру несовместности уравнения (1) с приближенными данными на множестве  $D \subseteq Z$  как

$$\mu_{\eta}(u_{\delta}, A_h) = \inf_{z \in D} \|A_h z - u_{\delta}\|.$$

Очевидно, что  $\mu_{\eta}(u_{\delta}, A_h) = 0$ , если  $u_{\delta} \in \overline{A_h D}$  (черта означает замыкание по норме соответствующего пространства).

**Л е м м а 2.** Если  $\|u_{\delta} - \bar{u}\| \leq \delta$ ,  $\bar{u} = A\bar{z}$ ,  $\bar{z} \in D$ ,  $\|A - A_h\| \leq h$ , то  $\mu_{\eta}(u_{\delta}, A_h) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Оно следует из того, что

$$\mu_{\eta}(u_{\delta}, A_h) = \inf_{z \in D} \|A_h z - u_{\delta}\| \leq \|A_h \bar{z} - u_{\delta}\| \leq \delta + h \|\bar{z}\| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

В дальнейшем будем предполагать, что мера несовместности вычисляется с погрешностью  $\kappa \geq 0$ , т.е. вместо  $\mu_{\eta}(u_{\delta}, A_h)$  известно такое  $\mu_{\eta}^{\kappa}(u_{\delta}, A_h)$ , что

$$\mu_{\eta}(u_{\delta}, A_h) \leq \mu_{\eta}^{\kappa}(u_{\delta}, A_h) \leq \mu_{\eta}(u_{\delta}, A_h) + \kappa.$$

Погрешность определения меры несовместности  $\kappa$  будем считать согласованной с погрешностью задания входных данных  $\eta$  таким образом, что  $\kappa = \kappa(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$  (например,  $\kappa(\eta) = h + \delta$ ).

Введем в рассмотрение функцию, называемую *обобщенной невязкой* [57, 59]:

$$\rho_{\eta}^{\kappa}(\alpha) = \|A_h z_{\eta}^{\alpha} - u_{\delta}\|^2 - (\delta + h \|z_{\eta}^{\alpha}\|)^2 - (\mu_{\eta}^{\kappa}(u_{\delta}, A_h))^2.$$

Сформулируем так называемый *обобщенный принцип невязки* для выбора параметра регуляризации. Пусть условие

$$\|u_{\delta}\|^2 > \delta^2 + (\mu_{\eta}^{\kappa}(u_{\delta}, A_h))^2 \quad (8)$$

не выполнено: тогда в качестве приближенного решения уравнения (1) выберем  $z_{\eta} = 0$ . Если же условие (8) выполнено, то обобщенная невязка имеет положительный корень  $\alpha^* > 0$  (см. § 4), т.е.

$$\|A_h z_{\eta}^{\alpha^*} - u_{\delta}\|^2 = (\delta + h \|z_{\eta}^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_{\eta}^{\kappa}(u_{\delta}, A_h))^2. \quad (9)$$

В этом случае положим приближенное решение уравнения (1)  $z_{\eta} = z_{\eta}^{\alpha^*}$ , причем, как будет показано ниже,  $z_{\eta}^{\alpha^*}$  определяется единственным образом.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $A$  — взаимно однозначный оператор,  $\eta = (\delta, h) \rightarrow 0$  таким образом, что  $\|A - A_h\| \leq h$ ,  $\|u_{\delta} - \bar{u}\| \leq \delta$ ,  $\bar{u} = A\bar{z}$ ,  $\bar{z} \in D$ . Тогда  $\lim_{\eta \rightarrow 0} z_{\eta} = \bar{z}$ , где  $z_{\eta}$  выбирается согласно обобщенному принципу невязки.

Если  $A$  не является взаимно однозначным оператором ( $\text{Ker } A \neq \{0\}$ ), то

утверждение теоремы остается справедливым, если считать  $\bar{z}$  нормальным решением уравнения (1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $\bar{z} = 0$ , то  $\|u_\delta\| \leq \delta$  и условие (8) не выполнено. В этом случае  $z_\eta = 0$  и теорема доказана.

Пусть теперь  $\bar{z} \neq 0$ . Тогда, поскольку  $\delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2 \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$  (см. лемму 2 и определения  $\mu_\eta^\kappa$  и  $\kappa$ ),  $\|u_\delta\| \rightarrow \|\bar{u}\| \neq 0$ , то условие (8) будет выполнено по крайней мере для достаточно малых  $\eta$ .

Схема доказательства теоремы 2 в этом случае не отличается от схемы доказательства теоремы 1. Опять предположим, что  $z_\eta^{\alpha^*(\eta)} \neq \bar{z}$ . Это означает, что существуют такое  $\epsilon > 0$  и такая последовательность  $\eta_k \rightarrow 0$ , что  $\|\bar{z} - z_{\eta_k}^{\alpha^*(\eta_k)}\| \geq \epsilon$ . В силу экстремальных свойств  $z_{\eta_k}^{\alpha^*(\eta_k)} \in D$  получим  $(\alpha^*(\eta_k) \equiv \alpha_k^*)$

$$\|A_{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|^2 \leq \|A_{h_k} \bar{z} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^* \|\bar{z}\|^2.$$

Учитывая обобщенный принцип невязки (9), имеем

$$\begin{aligned} & (\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|)^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|^2 \leq \\ & \leq (\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|)^2 + (\mu_{\eta_k}^{\kappa\kappa}(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|^2 \leq \\ & \leq (\delta_k + h_k \|\bar{z}\|)^2 + \alpha_k^* \|\bar{z}\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(\|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|) \leq f(\|\bar{z}\|),$$

где  $f(x) = (A + Bx)^2 + Cx^2$ ,  $A = \delta_k \geq 0$ ,  $B = h_k \geq 0$ ,  $C = \alpha_k^* > 0$ . Функция  $f(x)$  строго монотонна при  $x > 0$ , а следовательно,

$$\|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\| \leq \|\bar{z}\|.$$

Считая, как и при доказательстве теоремы 1, что  $z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \xrightarrow{сн} z^*$ ,  $z^* \in D$ , получим неравенство

$$\|z^*\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\| \leq \|\bar{z}\|,$$

которое аналогично (7).

Теперь для того, чтобы завершить доказательство, так же, как и в теореме 1, осталось доказать, что  $z^* = \bar{z}$ . Это следует из неравенства

$$\begin{aligned} & \|Az_{\eta_k}^{\alpha_k^*} - A\bar{z}\| \leq h_k \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\| + \{(\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|)^2 + \\ & + (\mu_{\eta_k}^{\kappa\kappa}(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2\}^{1/2} + \delta_k \leq \\ & \leq h_k \|\bar{z}\| + \{(\delta_k + h_k \|\bar{z}\|)^2 + (\mu_{\eta_k}^{\kappa\kappa}(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2\}^{1/2} + \delta_k \end{aligned}$$

и из того, что

$$h_k \|\bar{z}\| + \{(\delta_k + h_k \|\bar{z}\|)^2 + (\mu_{\eta_k}^{\kappa\kappa}(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2\}^{1/2} + \delta_k \rightarrow 0$$

при  $\eta_k \rightarrow 0$ .

В работе [162] замечено, что в формулировке обобщенного принципа невязки можно положить  $\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) = 0$  даже в том случае, когда

$u_\delta \notin A_h D$ . А именно, определим обобщенную невязку

$$\rho_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\|)^2.$$

Условие (8) примет вид

$$\|u_\delta\| > \delta. \quad (10)$$

Сформулируем теперь *обобщенный принцип невязки* в следующем виде.

1. Если условие  $\|u_\delta\| > \delta$  не выполнено, то полагаем приближенное решение уравнения (1)  $z_\eta = 0$ .

2. Если условие  $\|u_\delta\| > \delta$  выполнено, то:

а) если найдется  $\alpha^* > 0$  – корень функции  $\rho_\eta(\alpha)$ , то в качестве решения возьмем  $z_\eta^{\alpha^*}$ ;

б) если  $\rho_\eta(\alpha) > 0$  для всех  $\alpha > 0$ , то положим приближенное решение равным  $z_\eta = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} z_\eta^\alpha$ .

**Т е о р е м а 3.** *Если  $A$  – взаимно однозначный оператор, то сформулированный выше алгоритм является регуляризирующим. Если  $A$  не является взаимно однозначным, то имеет место сходимость регуляризованных приближенных решений  $z_\eta$  к нормальному решению уравнения (1) на множестве  $D$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Ясно (см. теорему 2), что если  $\bar{z} = 0$ , то утверждение теоремы справедливо. В случае, когда  $\bar{z} \neq 0$  и существует корень  $\rho_\eta(\alpha)$ , теорема также уже доказана, так как действуя как при доказательстве теоремы 2, легко показать, что

$$\begin{aligned} (\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|)^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|^2 &= \|A_{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|^2 \leq \\ &\leq \|A_{h_k} \bar{z} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^* \|\bar{z}\|^2 \leq (\delta_k + h_k \|\bar{z}\|)^2 + \alpha_k^* \|\bar{z}\|^2, \end{aligned}$$

т.е.  $\|z_\eta^{\alpha^*}\| \leq \|\bar{z}\|$ . В остальном доказательство теоремы 2 практически не меняется.

Итак, осталось исследовать случай, когда  $\rho_\eta(\alpha) > 0$  для всех  $\alpha > 0$ . Так как

$$\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2 \leq \|A_h \bar{z} - u_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{z}\|^2,$$

$$\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\| > \delta + h \|z_\eta^\alpha\|,$$

$$\|A_h \bar{z} - u_\delta\| \leq \delta + h \|\bar{z}\|,$$

то

$$(\delta + h \|z_\eta^\alpha\|)^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2 \leq (\delta + h \|\bar{z}\|)^2 + \alpha \|\bar{z}\|^2.$$

Отсюда, как и прежде, следует, что  $\|z_\eta^\alpha\| \leq \|\bar{z}\|$  для всех  $\alpha > 0$ . Тем самым, для любой последовательности  $\alpha_n$ , сходящейся к нулю, можно выделить такую подпоследовательность  $\alpha'_n$ , что  $z_\eta^{\alpha'_n}$  слабо сходится к  $z_\eta \in D$  (так как  $D$  слабо замкнуто). Не ограничивая общности, будем считать, что  $z_\eta^{\alpha_n} \xrightarrow{\text{сл}} z_\eta$ . В § 4 будет доказано, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} M^\alpha [z_\eta^\alpha] = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2.$$

Поэтому, поскольку

$$(\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 \leq \|A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta\|^2 + \alpha_n \|z_\eta^{\alpha_n}\|^2 \rightarrow (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$$

при  $\alpha_n \rightarrow 0$ , то

$$\|A_h z_\eta - u_\delta\| = \inf_{z \in D} \|A_h z - u_\delta\| = \mu_\eta(u_\delta, A_h)$$

и  $z_\eta$  — экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при  $\alpha = 0$  (т.е.  $z_\eta$  — квазирешение уравнения (1) с приближенными данными), удовлетворяющая неравенству  $\|z_\eta\| \leq \|\bar{z}\|$ , а  $z_\eta^{\alpha_n}$  — последовательность, минимизирующая функционал  $\|A_h z - u_\delta\|^2$  на множестве  $D$ . Функция  $\|z_\eta^\alpha\|$  монотонно не возрастает по  $\alpha$  (см. § 4) и ограничена сверху  $\|\bar{z}\|$ , поэтому существует

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \|z_\eta^\alpha\| = a,$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_\eta^{\alpha_n}\| = a \geq \|z_\eta\|.$$

Покажем, что  $\|z_\eta\| = a$ . Предположим, что это не так. Тогда, начиная с некоторого номера  $N$ ,  $\|z_\eta^{\alpha_n}\| > \|z_\eta\|$ . Но, поскольку

$$\|A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta\|^2 + \alpha_n \|z_\eta^{\alpha_n}\|^2 \leq (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 + \alpha_n \|z_\eta\|^2$$

(так как  $z_\eta^{\alpha_n}$  — экстремаль  $M^{\alpha_n}[z]$ ), то  $\|A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta\| \leq \mu_\eta(u_\delta, A_h)$ , начиная с номера  $N$ . Но в силу определения меры несовместности

$$\|A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta\| = \mu_\eta(u_\delta, A_h).$$

Поэтому  $z_\eta$  — экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  для всех  $\alpha_n$ , начиная с номера  $N$  (определяемая единственным образом), т.е.

$$\|z_\eta\| = \|z_\eta^{\alpha_n}\|.$$

Полученное противоречие показывает, что  $\|z_\eta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_\eta^{\alpha_n}\|$ , а значит,  $z_\eta^{\alpha_n}$  сходится к  $z_\eta$  не только слабо, но и сильно. Для доказательства существования  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} z_\eta^\alpha$  теперь достаточно доказать, что предел  $z_\eta$

последовательности  $\{z_\eta^{\alpha_n}\}$  не зависит от выбора последовательности  $\{\alpha_n\}$ . Действительно, предел  $\{z_\eta^{\alpha_n}\}$  будет являться экстремалью функционала  $M^0[z]$  с минимальной нормой. Пусть  $\bar{z}_\eta$  — экстремаль функционала  $M^0[z]$  с минимальной нормой, т.е.

$$\|A_h \bar{z}_\eta - u_\delta\|^2 = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 \leq \|A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta\|^2.$$

Очевидно, что

$$\|A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta\|^2 + \alpha_n \|z_\eta^{\alpha_n}\|^2 \leq \|A_h \bar{z}_\eta - u_\delta\|^2 + \alpha_n \|\bar{z}_\eta\|^2.$$

Следовательно,  $\|z_\eta^{\alpha_n}\| \leq \|\bar{z}_\eta\|$ , а значит,

$$\|z_\eta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_\eta^{\alpha_n}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_\eta^{\alpha_n}\| \leq \|\bar{z}_\eta\|,$$

и так как  $z_\eta$  — экстремаль  $M^0[z]$ , то  $z_\eta = \bar{z}_\eta$ .

Таким образом показано, что  $z_\eta = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} z_\eta^\alpha$  является решением

задачи:

найти

$$\inf \|z\|,$$

$$z \in D, \|A_h z - u_\delta\| = \mu_\eta(u_\delta, A_h).$$

Решение этой задачи существует и единственно. Тем самым доказано, что существует  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} z_\eta^\alpha = z_\eta$  ( $z_\eta$  — нормальное псевдорешение уравнения  $A_h z = u_\delta$ ).

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что

$$\|Az_\eta - \bar{u}\| \leq \|Az_\eta - A_h z_\eta + A_h z_\eta - u_\delta + u_\delta - \bar{u}\| \leq$$

$$\leq h \|z_\eta\| + \mu_\eta(u_\delta, A_h) + \delta \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow 0.$$

Отметим что в отличие от алгоритма, обоснованного в теореме 2, данная модификация обобщенного принципа невязки не требует вычисления  $\mu_\eta^k(u_\delta, A_h)$ . Однако при этом алгоритм теоремы 3 требует, чтобы уравнение (1) с точными данными было разрешимо на множестве  $D$ .

**З а м е ч а н и я.** 1. В работах [90, 163] доказана оптимальность по порядку обобщенного принципа невязки на компакте, являющемся образом шара рефлексивного пространства при вполне непрерывном отображении.

2. Предложенный в настоящем параграфе подход к решению линейных задач с приближенно заданным оператором можно считать обобщением метода наименьших квадратов Лежандра [217] и Гаусса [210], который, как известно, неустойчив относительно возмущений оператора (матрицы системы линейных алгебраических уравнений).

3. В работах [174—177] для систем линейных алгебраических уравнений и линейных уравнений в гильбертовом пространстве предложен метод, позволяющий не только находить приближенное решение задачи с возмущенным оператором (матрицей), но и оператор (матрицу), реализующий данное решение.

Устойчивые методы решения задач с приближенно заданным оператором были предложены в работах [169, 170]. Обобщенный принцип невязки является развитием принципа невязки выбора параметра регуляризации из равенства  $\|Az_\eta^\alpha - u_\delta\| = \delta$  (или  $\|Az_\eta^\alpha - u_\delta\| = C\delta$ ,  $C > 1$ ),  $\eta = (\delta, 0)$ ,  $\delta > 0$ ,  $\|u_\delta\| > \delta$  (см. [10, 38, 88, 128, 131, 135]).

Обобщенный принцип невязки для гильбертовых пространств был предложен и обоснован в [57, 59, 63], для рефлексивных пространств в [203, 205]. Обобщенный принцип невязки рассматривался в [90, 100, 101, 122, 138, 163, 206]. Применение обобщенного принципа невязки для решения практических задач, а также модельные расчеты можно найти в [71, 73, 94, 96, 118, 185]. Обобщенный принцип невязки для нелинейных задач рассмотрен в [7, 112, 114—117].

В заключение рассмотрим вопрос об устойчивости решения экстремальной задачи (3) к малым возмущениям  $u_\delta$ ,  $A_h$ ,  $\alpha$ . Аналогичный вопрос для случая точно заданного оператора с использованием схемы компактного вложения рассмотрен в [90]. Пусть  $P(u_\delta, A_h, \alpha) = z_\eta^\alpha$  есть отображе-

ние, действующее из произведения пространств  $U \times \text{Hom}(Z, U) \times R^+$  в множество  $D \subseteq Z$  и описывающее решение задачи минимизации  $M^\alpha[z]$  на  $D$ . Здесь  $\text{Hom}(Z, U)$  – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из  $Z$  в  $U$  с равномерной операторной метрикой,  $R^+$  – пространство положительных чисел с естественной метрикой.

**Теорема 4.** *Образование  $P$  из пространства  $U \times \text{Hom}(Z, U) \times R^+$  в пространство  $Z$  непрерывно.*

**Доказательство.** Если  $P$  не является непрерывным, то найдется такая последовательность  $(u_n, A_n, \alpha_n)$ , что  $(u_n, A_n, \alpha_n) \rightarrow (u, A, \alpha)$ , но  $z_n = P(u_n, A_n, \alpha_n) \not\rightarrow z^\alpha = P(u, A, \alpha)$ .

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\|z_n - z^\alpha\| \geq d > 0, \quad d = \text{const}.$$

Так как  $z_n = P(u_n, A_n, \alpha_n)$ , то

$$\|A_n z_n - u_n\|^2 + \alpha_n \|z_n\|^2 = \inf_{z \in D} (\|A_n z - u_n\|^2 + \alpha_n \|z\|^2).$$

В силу (4)

$$\|z_n\| \leq \sup_n \|u_n\| / \inf_n \sqrt{\alpha_n}.$$

Поскольку  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$ , то из последовательности  $z_n$  можно выделить последовательность, слабо сходящуюся к некоторому  $z^* \in D$ . Не ограничивая общности, будем считать, что вся последовательность  $z_n \xrightarrow{\text{с.л.}} z^* \in D$  (так как  $D$  выпукло и замкнуто и, следовательно, слабо замкнуто) и  $\|z_n\| \rightarrow a$ . Легко видеть, что  $A_n z_n \xrightarrow{\text{с.л.}} A z^*$ . Действительно,

$$\|(A_n - A)z_n\| \leq \|A_n - A\| \sup_n \|u_n\| / \inf_n \sqrt{\alpha_n}.$$

Поэтому  $(A_n - A)z_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  сильно, а следовательно, и слабо. Далее  $A z_n \xrightarrow{\text{с.л.}} A z^*$ . Так как  $A$  – линейный ограниченный оператор, то  $A_n z_n \xrightarrow{\text{с.л.}} A z^*$ .

Итак,

$$\begin{aligned} \|A z^* - u\|^2 + \alpha \|z^*\|^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|A_n z_n - u_n\|^2 + \alpha_n \|z_n\|^2) \leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|A_n z^\alpha - u_n\|^2 + \alpha_n \|z^\alpha\|^2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|A - A_n\| \|z^\alpha\| + \\ &+ \|A z^\alpha - u_n\|)^2 + \alpha_n \|z^\alpha\|^2 = \|A z^\alpha - u\|^2 + \alpha \|z^\alpha\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку  $z^* \in D$ , то  $z^* = z^\alpha$  и в последней цепочке неравенств все неравенства следует заменить на равенства. Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в неравенстве

$$\|A_n z_n - u_n\|^2 + \alpha_n \|z_n\|^2 \leq \|A_n z^\alpha - u_n\|^2 + \alpha_n \|z^\alpha\|^2$$

и учитывая, что  $\|z_n\| \rightarrow a$ , получим

$$\|A z^* - u\|^2 + \alpha a^2 = \|A z^\alpha - u\|^2 + \alpha \|z^\alpha\|^2.$$

Сравнивая это равенство с (11), получим  $\|z^*\| = a = \|z^\alpha\|$ , т.е.  $z_n \xrightarrow{\text{с.л.}} z^\alpha$  и  $\|z_n\| \rightarrow \|z^\alpha\|$ , или  $z_n \rightarrow z^\alpha$  сильно, что противоречит предположению.

### § 3. Эквивалентность обобщенного принципа и обобщенного метода невязки

Для того чтобы лучше понять смысл выбора параметра регуляризации в соответствии с обобщенным принципом невязки, докажем эквивалентность его *обобщенному методу невязки* – экстремальной задаче с ограничениями:

найти

$$\inf \|z\|,$$

$$z \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|z\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2\}. \quad (12)$$

Обобщенный метод невязки, введенный впервые в работе [58] для решения нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором в конкретных функциональных пространствах, является обобщением метода невязки ( $h = 0$ ) решения подобных задач с точно заданным оператором. Идея метода невязки была впервые высказана в [218], однако строгая постановка задачи и обоснование метода впервые были приведены в работе [88]. Дальнейшее развитие круга идей, связанных с применением методов невязки для решения некорректных задач, дается в работах [34, 36, 37, 89, 121, 139, 161, 209]. Обобщенный метод невязки в рефлексивных пространствах изучается в работах [102, 204].

Эквивалентность обобщенного метода невязки и обобщенного принципа невязки впервые доказаны в работе [162], однако при некоторых излишних предположениях. Ниже мы будем придерживаться схемы доказательства, предложенной в работе [205].

**Теорема 5.** Пусть  $A, A_h$  – линейные ограниченные операторы из  $Z$  в  $U$ ;  $D$  – замкнутое выпуклое множество, содержащее точку  $0, D \subseteq Z$ ;  $\|A - A_h\| \leq h, \|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta, \bar{u} = A\bar{z}, \bar{z} \in D$ . Тогда обобщенный принцип невязки и обобщенный метод невязки эквивалентны, т.е. решение уравнения (1), выбранное из условий (8), (9), и решение экстремальной задачи (12) совпадают.

**Доказательство.** Пусть условие (8) не выполнено. Тогда

$$0 \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|z\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2\},$$

и решение задачи (12) есть  $\hat{z}_\eta = 0$ . Поскольку обобщенный принцип невязки в этом случае также приводит к  $z_\eta = 0$ , то остается доказать их эквивалентность в случае, когда (8) выполнено. В этом случае задача (12) эквивалентна задаче:

найти

$$\inf \|z\|,$$

$$z \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 = (\delta + h \|z\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2\}.$$

В самом деле,  $0 \notin \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|z\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2\}$ . Пусть  $\hat{z}_\eta \in D$  – такое решение задачи (12), что

$$\|A_h \hat{z}_\eta - u_\delta\|^2 < (\delta + h \|\hat{z}_\eta\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2.$$

Функция

$$f(x) = \|A_h z_x - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z_x\|)^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$$

вещественной переменной  $x$ , где  $z_x = x \hat{z}_\eta$  непрерывна на  $[0, 1]$ , причем  $f(0) > 0, f(1) < 0$ . Поэтому найдется такое  $\bar{x} \in (0, 1)$ , что  $f(\bar{x}) = 0$ , т.е.

$$\|A_h z_{\bar{x}} - u_\delta\|^2 = (\delta + h \|z_{\bar{x}}\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2.$$

Но

$$\|z_{\bar{x}}\| = \bar{x} \|\hat{z}_\eta\| < \|\hat{z}_\eta\|,$$

что противоречит тому, что  $\hat{z}_\eta$  – решение задачи (12).

Обратимся теперь к обобщенному принципу невязки. Пусть  $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$ ,  $\alpha^* > 0$ ,  $z_\eta^{\alpha^*}$  определяется единственным образом, причем  $z_\eta^{\alpha^*} \neq 0$  и (как будет показано ниже) имеет место неравенство

$$\|u_\delta\|^2 > (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2.$$

Вместо функционала  $M^\alpha[z]$  рассмотрим функционал

$$\tilde{M}^\lambda[z] = \lambda [\|A_h z - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2] + \|z\|^2,$$

где  $\lambda = 1/\alpha$ . В силу равенства (9)

$$\tilde{M}^{\lambda^*}[z_\eta^{\alpha^*}] = \tilde{M}^\lambda[z_\eta^{\alpha^*}] = \|z_\eta^{\alpha^*}\|^2$$

для любого  $\lambda > 0$  (здесь  $\lambda^* = 1/\alpha^*$ ).

Поскольку  $z_\eta^{\alpha^*}$  – экстремаль функционала  $M^{\alpha^*}[z]$ , а следовательно, и функционала  $\tilde{M}^{\lambda^*}[z]$ , то для любого  $z \in D$

$$\tilde{M}^{\lambda^*}[z_\eta^{\alpha^*}] \leq \tilde{M}^{\lambda^*}[z].$$

Поэтому  $(z_\eta^{\alpha^*}, \lambda^*)$  – седловая точка функционала  $\tilde{M}^\lambda[z]$ . По теореме Куна – Таккера [90]  $z_\eta^{\alpha^*}$  является решением задачи:

найти

$$\inf \|z\|,$$

$$z \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 = (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2\}.$$

На самом деле, пусть во множестве ограничений существует элемент  $z'$  такой, что

$$z' \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 = (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2\}$$

и

$$\|z'\| < \|z_\eta^{\alpha^*}\|.$$

Тогда

$$\tilde{M}^{\lambda^*}[z'] = \|z'\|^2 < \tilde{M}^{\lambda^*}[z_\eta^{\alpha^*}] = \|z_\eta^{\alpha^*}\|^2,$$

что противоречит неравенству  $\tilde{M}^{\lambda^*}[z_\eta^{\alpha^*}] \leq \tilde{M}^{\lambda^*}[z]$  для любого  $z \in D$ .

Последняя экстремальная задача в силу условия

$$0 \notin \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2\},$$

следующего из (8), (9) и доказанных ниже (лемма 3) монотонности  $\beta_\eta(\alpha)$  и предельных соотношений при  $\alpha \rightarrow +\infty$ , эквивалентна экстремальной



задаче (доказательство эквивалентности аналогично доказательству эквивалентности двух экстремальных задач в начале теоремы):

найти

$$\inf \|z\|,$$

$$z \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_\eta^K(u_\delta, A_h))^2\}. \quad (13)$$

Решение этой задачи существует и единственно в силу замкнутости и выпуклости множества  $\{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_\eta^K(u_\delta, A_h))^2\}$  из гильбертова пространства  $Z$ . Поэтому это решение есть  $z_\eta^{\alpha^*}$ .

Покажем, что  $z_\eta^{\alpha^*}$  — решение задачи (12). Предположим, что в множестве ограничений задачи (12) найдется такой элемент  $\hat{z}$ , что  $\|\hat{z}\| < \|z_\eta^{\alpha^*}\|$  (отметим, что  $z_\eta^{\alpha^*}$  удовлетворяет ограничениям задачи (12) в силу (9)). Тогда  $\hat{z} \in D$  и

$$\|A_h \hat{z} - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|\hat{z}\|)^2 + (\mu_\eta^K(u_\delta, A_h))^2.$$

Но  $z_\eta^{\alpha^*}$  является решением задачи (13) и

$$\begin{aligned} & \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|\hat{z}\|)^2 + (\mu_\eta^K(u_\delta, A_h))^2\} \subseteq \\ & \subseteq \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + (\mu_\eta^K(u_\delta, A_h))^2\}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\|\hat{z}\| \geq \|z_\eta^{\alpha^*}\|$ , так как  $\|\hat{z}\| \geq \|\hat{z}\|$ , где  $\hat{z}$  — решение задачи: найти

$$\inf \|z\|,$$

$$z \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|\hat{z}\|)^2 + (\mu_\eta^K(u_\delta, A_h))^2\}.$$

Полученное противоречие показывает, что  $z_\eta^{\alpha^*}$  — единственное решение задачи (12).

Итак, решение экстремальной задачи (12) с невыпуклыми ограничениями можно свести к задаче выпуклого программирования — минимизации функционала  $M^\alpha[z]$  с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки.

**З а м е ч а н и я.** 1. Пусть  $D = Z, \overline{A_h Z} = U$ . Тогда в формулировке обобщенного принципа невязки и задачи (12) можно положить  $\mu_\eta^K(u_\delta, A_h) = 0$ .

2. Легко показать (на простых примерах), что модификация обобщенного принципа невязки, рассмотренная в теореме 3, вообще говоря, не эквивалентна задаче (12), в которой отсутствует  $\mu_\eta^K$ , т.е. не эквивалентна задаче:

найти

$$\inf \|z\|,$$

$$z \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\| \leq \delta + h \|z\|\}.$$

Связь обобщенного метода невязки и обобщенного принципа невязки для нелинейных некорректных задач исследована в [116].

#### § 4. Обобщенная невязка и ее свойства

В настоящем параграфе мы подробно изучим свойства некоторых вспомогательных функций параметра регуляризации  $\alpha > 0$ :

$$\Phi_\eta(\alpha) = M^\alpha[z_\eta^\alpha] = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2, \quad (14)$$

$$\gamma_\eta(\alpha) = \|z_\eta^\alpha\|^2, \quad (15)$$

$$\beta_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2, \quad (16)$$

и свойства обобщенной невязки  $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$ , введенной в § 2.

**Л е м м а 3.** *Функции  $\Phi_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$  как функции параметра  $\alpha$  обладают следующими свойствами.*

1. Они непрерывны при  $\alpha > 0$ .
2. Функции  $\Phi_\eta(\alpha)$  вогнута, дифференцируема и  $\Phi_\eta'(\alpha) = \gamma_\eta(\alpha)$ .
3. Функция  $\gamma_\eta(\alpha)$  монотонно не возрастает, а функции  $\Phi_\eta(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$  монотонно не убывают при  $\alpha > 0$ , причем на интервале  $(0, \alpha_0)$  таком, что  $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$ , функция  $\Phi_\eta(\alpha)$  строго монотонна.

4. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \gamma_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \gamma_\eta(\alpha) = 0;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Phi_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \beta_\eta(\alpha) = \|u_\delta\|^2;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \alpha \gamma_\eta(\alpha) = 0;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_\eta(\alpha) = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Утверждения 2 и 3 легко вытекают из неравенства (18), впервые полученного и примененного для исследования вспомогательных функций в работах [127–131]. Фиксируя  $\alpha' \in (0, \alpha)$  и вычитая из очевидного неравенства

$$\Phi_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2 \leq \|A_h z_\eta^{\alpha'} - u_\delta\|^2 + \alpha \|z_\eta^{\alpha'}\|^2$$

выражение для  $\Phi_\eta(\alpha')$ , получим

$$\Phi_\eta(\alpha) - \Phi_\eta(\alpha') \leq (\alpha - \alpha') \|z_\eta^{\alpha'}\|^2. \quad (17)$$

Аналогично получаем неравенство

$$\Phi_\eta(\alpha') - \Phi_\eta(\alpha) \leq (\alpha' - \alpha) \|z_\eta^\alpha\|^2.$$

Из последних двух неравенств вытекает, что

$$\|z_\eta^\alpha\|^2 \leq \frac{\Phi_\eta(\alpha) - \Phi_\eta(\alpha')}{\alpha - \alpha'} \leq \|z_\eta^{\alpha'}\|^2. \quad (18)$$

Поскольку  $\|z_\eta^\alpha\|^2 \geq 0$ , то  $\Phi_\eta(\alpha)$  монотонно не убывает, а если  $\|z_\eta^\alpha\| \neq 0$  на интервале  $(0, \alpha_0)$ , то  $\Phi_\eta(\alpha)$  монотонно возрастает на этом интервале. Из (18) следует также, что если  $\alpha' \in (0, \alpha)$ , то  $\|z_\eta^{\alpha'}\|^2 \leq \|z_\eta^\alpha\|^2$ , что означает невозрастание функции  $\gamma_\eta(\alpha)$ .

Из неравенства (4) следует, что если мы фиксируем  $\alpha_0: 0 < \alpha_0 < \alpha' < \alpha$ , то

$$\|z_{\eta}^{\alpha'}\| \leq \|u_{\delta}\| / \sqrt{\alpha_0}.$$

Из этого неравенства и неравенства (17) вытекает непрерывность  $\Phi_{\eta}(\alpha)$  для любого  $\alpha > 0$ .

Далее из (4) получаем, что  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \gamma_{\eta}(\alpha) = 0$ . Отсюда в силу непрерывности оператора  $A_h$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \beta_{\eta}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|A_h z_{\eta}^{\alpha} - u_{\delta}\|^2 = \|u_{\delta}\|^2.$$

Поскольку  $M^{\alpha}[z_{\eta}^{\alpha}] \leq M^{\alpha}[0] = \|u_{\delta}\|^2$ , то

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \gamma_{\eta}(\alpha) = 0; \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Phi_{\eta}(\alpha) = \|u_{\delta}\|^2.$$

Покажем теперь, что невязка  $\beta_{\eta}(\alpha)$  монотонно не убывает. Для этого достаточно заметить, что при  $\alpha' \in (0, \alpha)$

$$\begin{aligned} \|A_h z_{\eta}^{\alpha'} - u_{\delta}\|^2 + \alpha' \|z_{\eta}^{\alpha'}\|^2 &\leq \|A_h z_{\eta}^{\alpha} - u_{\delta}\|^2 + \alpha' \|z_{\eta}^{\alpha}\|^2 \leq \\ &\leq \|A_h z_{\eta}^{\alpha} - u_{\delta}\|^2 + \alpha' \|z_{\eta}^{\alpha'}\|^2. \end{aligned}$$

Второе из этих неравенств является следствием невозрастания функции  $\gamma_{\eta}(\alpha)$ . Для доказательства непрерывности  $\gamma_{\eta}(\alpha)$  воспользуемся условием

$$((M^{\alpha}[z_{\eta}^{\alpha}])', z - z_{\eta}^{\alpha}) \geq 0 \quad \forall z \in D, \quad \forall \alpha > 0,$$

или

$$\begin{aligned} (A_h^* A_h z_{\eta}^{\alpha} + \alpha z_{\eta}^{\alpha} - A_h^* u_{\delta}, z - z_{\eta}^{\alpha}) &\geq 0, \\ (A_h^* A_h z_{\eta}^{\alpha'} + \alpha' z_{\eta}^{\alpha'} - A_h^* u_{\delta}, z - z_{\eta}^{\alpha'}) &\geq 0 \quad \forall z \in D. \end{aligned}$$

Положив в первом из этих неравенств  $z = z_{\eta}^{\alpha'}$ , а во втором  $z = z_{\eta}^{\alpha}$  и сложив их, получим

$$(A_h^* A_h (z_{\eta}^{\alpha} - z_{\eta}^{\alpha'}) + \alpha z_{\eta}^{\alpha} - \alpha' z_{\eta}^{\alpha'}, z_{\eta}^{\alpha'} - z_{\eta}^{\alpha}) \geq 0,$$

или

$$(A_h^* A_h (z_{\eta}^{\alpha} - z_{\eta}^{\alpha'}) + \alpha z_{\eta}^{\alpha} - \alpha z_{\eta}^{\alpha'} + \alpha z_{\eta}^{\alpha'} - \alpha' z_{\eta}^{\alpha'}, z_{\eta}^{\alpha} - z_{\eta}^{\alpha'}) \leq 0,$$

или

$$\|A_h (z_{\eta}^{\alpha} - z_{\eta}^{\alpha'})\|^2 + \alpha \|z_{\eta}^{\alpha} - z_{\eta}^{\alpha'}\|^2 \leq (\alpha' - \alpha) (z_{\eta}^{\alpha'}, z_{\eta}^{\alpha} - z_{\eta}^{\alpha'}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|z_{\eta}^{\alpha'}\| - \|z_{\eta}^{\alpha}\| &\leq \|z_{\eta}^{\alpha} - z_{\eta}^{\alpha'}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} |\alpha' - \alpha| \{ \|z_{\eta}^{\alpha'}\| (\|z_{\eta}^{\alpha}\| + \|z_{\eta}^{\alpha'}\|) \}^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha_0^{3/2}} \|u_{\delta}\| |\alpha' - \alpha|, \end{aligned}$$

т.е.  $\gamma_{\eta}(\alpha) = \|z_{\eta}^{\alpha}\|^2$  непрерывна (даже липшиц-непрерывна). Непрерывность функции  $\beta_{\eta}(\alpha)$  следует из непрерывности функций  $\Phi_{\eta}(\alpha)$ ,  $\gamma_{\eta}(\alpha)$ .

Из неравенства (18) и непрерывности  $\gamma_\eta(\alpha)$  следует, что  $\Phi_\eta(\alpha)$  дифференцируема для любого  $\alpha > 0$ , причем  $\Phi'_\eta(\alpha) = \gamma_\eta(\alpha)$ . Тем самым функция  $\Phi_\eta(\alpha)$  вогнута, так как ее производная  $\gamma_\eta(\alpha)$  монотонно не возрастает [91].

В силу того, что  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|z_\eta^\alpha\| = 0$  и  $\|z_\eta^\alpha\|$  не возрастает при увеличении  $\alpha$ , легко видеть, что если  $z_\eta^{\alpha_0} = 0$  при некотором  $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ , то  $z_\eta^\alpha = 0$  и при всех  $\alpha > \alpha_0$ . Если  $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$  при  $\alpha_0 > 0$ , то  $z_\eta^\alpha \neq 0$  при всех  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ .

Рассмотрим теперь поведение функций  $\Phi_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0+0$ . Зададим произвольное  $\epsilon > 0$ . Тогда найдется такое  $z^\epsilon \in D$ , что

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) \leq \|A_h z^\epsilon - u_\delta\| \leq \mu_\eta(u_\delta, A_h) + \epsilon.$$

Очевидно неравенство

$$\beta_\eta(\alpha) \leq \Phi_\eta(\alpha) \leq \|A_h z^\epsilon - u_\delta\|^2 + \alpha \|z^\epsilon\|^2,$$

из которого следует, что

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_\eta(\alpha) \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_\eta(\alpha) \leq (\mu_\eta(u_\delta, A_h) + \epsilon)^2.$$

Но так как

$$\beta_\eta(\alpha) \geq \inf_{z \in D} \|A_h z - u_\delta\|^2 = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2,$$

то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_\eta(\alpha) \geq (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2.$$

Теперь в силу произвольности  $\epsilon > 0$  получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_\eta(\alpha) = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2,$$

а также

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2 = 0; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_\eta(\alpha) = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2.$$

С л е д с т в и е. Обобщенная невязка  $\rho_\eta^\kappa(\alpha) = \beta_\eta(\alpha) - (\delta + h\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)})^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$  непрерывна и монотонно не убывает при  $\alpha > 0$ ;
- 2)  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \rho_\eta^\kappa(\alpha) = \|u_\delta\|^2 - \delta^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$ ;
- 3)  $\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} \rho_\eta^\kappa(\alpha) \leq -\delta^2$ ;
- 4) если выполнено условие (8), то найдется такое  $\alpha^* > 0$ , что

$$\rho_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0. \tag{19}$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению (9), причем элемент  $z_\eta^{\alpha^*}$  не равен нулю и определяется единственным образом.

Доказательство. Утверждения пп. 1)–3) следуют из свойств функций  $\beta_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$ . Понятно, что в п. 4) достаточно доказать лишь единственность элемента  $z_\eta^{\alpha^*}$ .

Вообще говоря, в силу того, что функция  $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$  может не обладать свойством строгой монотонности, элемент  $\alpha^*$  может определяться неоднозначно. При этом множество корней уравнения  $\rho_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0$  заполняет, вообще говоря, некоторый интервал. Пусть  $\alpha^*$  принадлежит этому интервалу. Для всех  $z_\eta^{\alpha^*}$  выполнено условие (19). Из (19) и монотонности функций  $\beta_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$  следует, что эти функции постоянны на указанном интервале. Следовательно, элемент  $z_\eta^{\alpha^*}$ , взятый для произвольного  $\alpha^*$  из указанного интервала и определенный единственным образом, является экстремалью функционала (2) для любого  $\alpha^*$ , удовлетворяющего (19).

Свойства функции  $\rho_\eta(\alpha) = \beta_\eta(\alpha) - (\delta + h\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)})^2$  могут быть легко получены аналогичным образом, однако, как отмечалось в § 3, корень уравнения  $\rho_\eta(\alpha) = 0$  может не существовать при  $\alpha > 0$ .

Прежде чем перейти к вопросам, связанным с отысканием корня обобщенной невязки, рассмотрим, какие дополнительные свойства приобретают вспомогательные функции и обобщенная невязка в случае задачи без ограничений ( $D = Z$ ) (или если  $z_\eta^\alpha$  — внутренние точки множества  $D$ ).

В этом случае экстремаль функционала может быть найдена как решение уравнения Эйлера (5), а именно

$$z_\eta^\alpha = R_\eta^\alpha A_h^* u_\delta = (A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} A_h^* u_\delta.$$

*Л е м м а 4. Оператор  $R_\eta^\alpha$  обладает следующими свойствами:*

- 1) если  $D(A_h) = Z$ , то  $D(R_\eta^\alpha) = Z$ ;
- 2)  $\|R_\eta^\alpha\| \leq 1/\alpha$ ;
- 3)  $R_\eta^\alpha$  положительно определен;
- 4)  $R_\eta^\alpha$  непрерывно зависит от  $\alpha$  в равномерной операторной топологии.

*До к а з а т е л ь с т в о.* Оператор  $A_h^* A_h$  самосопряженный, неотрицательно определенный,  $\alpha > 0$ , поэтому  $\text{Ker}(A_h^* A_h + \alpha E) = 0$ . Отсюда следует существование оператора  $R_\eta^\alpha$ . Найдем его область определения. Пусть  $R(A_h^* A_h + \alpha E)$  — множество значений оператора  $A_h^* A_h + \alpha E$ . Ясно, что это линейное многообразие в  $Z$ . Покажем, что оно замкнуто. Пусть последовательность  $z_n = (A_h^* A_h + \alpha E) \psi_n$  сходится к  $z_0 \in Z$ . Докажем, что найдется такое  $\psi_0 \in Z$ , что  $z_0 = (A_h^* A_h + \alpha E) \psi_0$ .

Поскольку

$$\psi_n = (A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} z_n,$$

$$\|(A_h^* A_h + \alpha E) \psi_n\|^2 = \|A_h^* A_h \psi_n\|^2 + 2\alpha(A_h^* A_h \psi_n, \psi_n) + \alpha^2 \|\psi_n\|^2,$$

$$(A_h^* A_h \psi_n, \psi_n) \geq 0,$$

то

$$\|\psi_n\| \leq (1/\alpha) \|(A_h^* A_h + \alpha E) \psi_n\| \leq (1/\alpha) \|z_n\|. \quad (20)$$

Тем самым последовательность  $\psi_n$  ограничена. Выберем из нее слабо сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем считать,

что  $\psi_n \xrightarrow{c\lambda} \psi_0$ . В силу слабой замкнутости замкнутого выпуклого множества  $D(A_h^* A_h)$  гильбертова пространства  $Z$   $\psi_0$  принадлежит  $D(A_h^* A_h)$ . Поскольку  $A_h^* A_h + \alpha E$  — линейный ограниченный оператор, то он является непрерывным из слабой топологии в слабую [95], из этого следует, что  $(A_h^* A_h + \alpha E) \psi_0 = z_0$ . Таким образом, мы показали, что  $R(A_h^* A_h + \alpha E)$  — подпространство  $Z$ . Покажем, что  $R(A_h^* A_h + \alpha E)$  совпадает с  $Z$ . Разложим  $Z$  в прямую сумму:

$$Z = R(A_h^* A_h + \alpha E) \oplus (R(A_h^* A_h + \alpha E))^\perp.$$

Предположим, что  $z \in (R(A_h^* A_h + \alpha E))^\perp$ , т.е.  $(z, (A_h^* A_h + \alpha E)u) = 0$  для любого  $u \in Z$ . Выбирая  $u = z$ , получим  $(z, A_h^* A_h z + \alpha z) = \|A_h z\|^2 + \alpha \|z\|^2 = 0$ , т.е.  $z = 0$ ; это означает, что  $Z = R(A_h^* A_h + \alpha E)$  для любого  $\alpha > 0$ .

Оценка нормы оператора  $R_\eta^\alpha$  п. 2) сразу следует из (20). Утверждение п. 4) леммы является следствием оценки п. 2) и отношения

$$\begin{aligned} \|R_\eta^{\alpha + \Delta\alpha} - R_\eta^\alpha\| &= \sup_{\|z\|=1} \|R_\eta^{\alpha + \Delta\alpha} z - R_\eta^\alpha z\| = \\ &= \sup_{\|(A_h^* A_h + (\alpha + \Delta\alpha)E)\psi\|=1} \|\psi - \psi - \Delta\alpha(A_h^* A_h + \alpha E)^{-1}\psi\| \leq \\ &\leq \frac{|\Delta\alpha|}{\alpha} \sup_{\|z\|=1} \|(A_h^* A_h + (\alpha + \Delta\alpha)E)^{-1}z\| \leq \frac{|\Delta\alpha|}{\alpha(\alpha + \Delta\alpha)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4 гарантирует разрешимость и единственность решения уравнения Эйлера (5) для любого  $u_\delta \in U$ . Покажем, какие дополнительные свойства приобретают в этом случае функции  $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$ ,  $\Phi_\eta(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$ .

**Л е м м а 5.** Пусть  $D = Z$ . Тогда функции  $\Phi_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$ ,  $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$  кроме свойств, перечисленных в лемме 3 и ее следствии, обладают следующими свойствами (рис. 1.1).

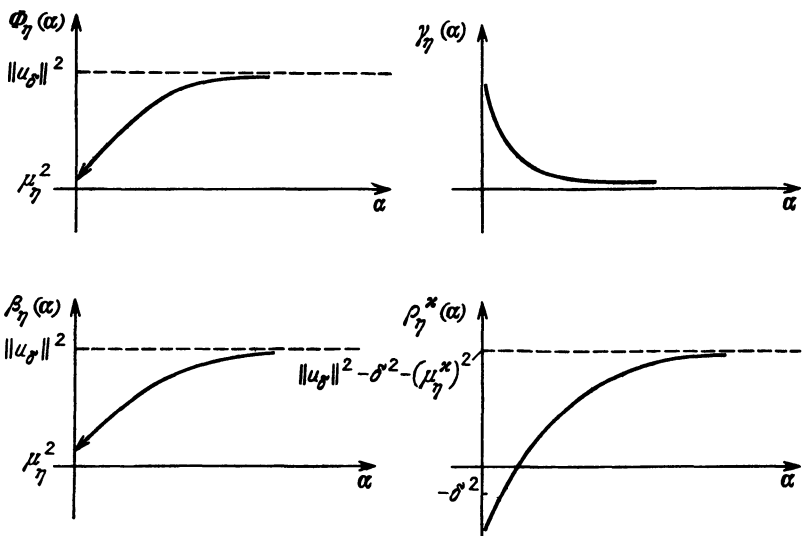
1. Они непрерывно дифференцируемы при  $\alpha > 0$  ( $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$  непрерывно дифференцируема, если  $z_\eta^\alpha \neq 0$ ), причем

$$\begin{aligned} \gamma_\eta'(\alpha) &= -((A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} z_\eta^\alpha, z_\eta^\alpha), \quad \beta_\eta'(\alpha) = -\alpha \gamma_\eta'(\alpha), \quad (\rho_\eta^\kappa(\alpha))' = \\ &= -\gamma_\eta'(\alpha) \left( \alpha + \frac{h\delta}{\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)}} + h^2 \right), \quad \Phi_\eta''(\alpha) = \gamma_\eta'(\alpha). \end{aligned} \quad (21)$$

2. Функции  $\Phi_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$ ,  $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$  на интервале  $(0, \alpha_0)$  таком, что  $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$ , строго монотонны, причем достаточным условием строгой монотонности функций при всех  $\alpha > 0$  является условие (8).

3. Функция  $V_\eta(\lambda) = \beta_\eta(1/\lambda)$  выпукла по  $\lambda$  при  $\lambda > 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для доказательства п. 1 заметим, что из п. 2 леммы 3 следует, что достаточно найти  $\gamma_\eta'(\alpha)$ . Зафиксируем  $\alpha > 0$  и рассмотрим такие приращения  $\Delta\alpha$ , что  $\alpha + \Delta\alpha > 0$ . Обозначим  $\Delta z_\eta^\alpha = z_\eta^{\alpha + \Delta\alpha} -$



Р и с. 1.1. Функции  $\Phi_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$  и  $\rho_\eta^*(\alpha)$  в случае, если  $D=Z$  и выполнено условие (8)

$-z_\eta^\alpha$ . По утверждению 4) леммы 4  $\|\Delta z_\eta^\alpha\| \rightarrow 0$  при  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ . Запишем уравнения Эйлера, соответствующие  $\alpha$  и  $\alpha + \Delta\alpha$ :

$$A_h^* A_h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha = A_h^* u_\delta,$$

$$A_h^* A_h (z_\eta^\alpha + \Delta z_\eta^\alpha) + (\alpha + \Delta\alpha)(z_\eta^\alpha + \Delta z_\eta^\alpha) = A_h^* u_\delta.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$\Delta z_\eta^\alpha = -\Delta\alpha (A_h^* A_h + (\alpha + \Delta\alpha)E)^{-1} z_\eta^\alpha.$$

Рассмотрим теперь разностное отношение

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_\eta(\alpha + \Delta\alpha) - \gamma_\eta(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \frac{(z_\eta^\alpha + \Delta z_\eta^\alpha, z_\eta^\alpha + \Delta z_\eta^\alpha) - (z_\eta^\alpha, z_\eta^\alpha)}{\Delta\alpha} = \\ &= \frac{2(\Delta z_\eta^\alpha, z_\eta^\alpha) + (\Delta z_\eta^\alpha, \Delta z_\eta^\alpha)}{\Delta\alpha} = -\frac{2\Delta\alpha}{\Delta\alpha} ((A_h^* A_h + (\alpha + \Delta\alpha)E)^{-1} z_\eta^\alpha, z_\eta^\alpha) + \\ &+ \frac{(\Delta\alpha)^2}{\Delta\alpha} \|(A_h^* A_h + (\alpha + \Delta\alpha)E)^{-1} z_\eta^\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{\gamma_\eta(\alpha + \Delta\alpha) - \gamma_\eta(\alpha)}{\Delta\alpha} \rightarrow -2((A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} z_\eta^\alpha, z_\eta^\alpha)$  при

$\Delta\alpha \rightarrow 0$ . При этом мы воспользовались непрерывностью  $R_\eta^\alpha$  по  $\alpha$  и ограниченностью  $R_\eta^\alpha$  как линейного оператора из  $Z$  в  $Z$ . Формула (21) доказана. Так как  $R_\eta^\alpha$  — положительно определенный оператор (лемма 4), то  $\gamma_\eta'(\alpha) < 0$  для любого  $\alpha \in (0, \alpha_0]$ , где  $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$ , т.е.  $\gamma_\eta(\alpha)$  (а также  $\Phi_\eta(\alpha)$ ,

$\beta_\eta(\alpha), \rho_\eta^\kappa(\alpha)$  строго монотонны на интервале  $(0, \alpha_0]$ . Для завершения доказательства п. 2 заметим, что поскольку  $U$  – гильбертово пространство, то оно представимо в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств [90]:

$$U = \overline{A_h Z} \oplus \text{Ker } A_h^*.$$

Поэтому  $u_\delta$  однозначно представимо в виде  $u_\delta = v_\delta + w_\delta, v_\delta \in \text{Ker } A_h^*, w_\delta \in \overline{A_h Z}$ , причем

$$(\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 = \inf_{z \in Z} \|A_h z - u_\delta\|^2 = \|w_\delta - u_\delta\|^2 = \|v_\delta\|^2.$$

Если  $z_\eta^\alpha = 0$ , то из уравнения Эйлера следует, что  $A_h^* u_\delta = 0$ , т.е.  $u_\delta \in \text{Ker } A_h^*, u_\delta = v_\delta$ . Следовательно, если  $\|u_\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2 = \delta^2 + (\|v_\delta\| + \kappa)^2$ , то  $z_\eta^\alpha$  не может равняться нулю ни при каких  $\alpha > 0$ .

Пункт 3 доказывается с помощью замены переменной  $\alpha = 1/\lambda$  и непосредственным вычислением второй производной функции  $\beta_\eta(1/\lambda)$  способом, аналогичным вычислению первой производной функции  $\gamma_\eta(\alpha)$ .

*С л е д с т в и е.* Если  $D = Z$ , то  $\alpha^*$ , которое определяется согласно обобщенному принципу невязки  $\rho_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0$ , единственно.

*З а м е ч а н и е.* Производные функций  $\Phi_\eta(\alpha), \gamma_\eta(\alpha), \beta_\eta(\alpha)$  были вычислены в работах [135, 136] в конечномерном случае с помощью разложения решения уравнения Эйлера (5) по собственным векторам матрицы  $A_h^* A_h$ . Там же была отмечена выпуклость функции  $\beta_\eta(\lambda) = \beta_\eta(1/\lambda)$  по  $\lambda$ , что позволяет решать уравнение  $\beta_\eta(\lambda) = \delta^2$  для выбора параметра регуляризации по принципу невязки ( $h = 0$ ) методом Ньютона.

Рассмотрим подробнее вопрос об отыскании корня уравнения (19) в случае  $D = Z$ . В этом случае  $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$  – строго монотонно возрастающая (если выполнено условие (8)), дифференцируемая функция при  $\alpha > 0$ , причем если  $h = 0$ , то функция  $\sigma_\eta^\kappa(\lambda) = \rho_\eta^\kappa(1/\lambda)$  – выпуклая. Для реализации поиска корня уравнения (19) желательно иметь оценку сверху для параметра регуляризации  $\alpha^*$ , т.е. такое значение параметра  $\bar{\alpha} \geq \alpha^*$ , что  $\rho_\eta^\kappa(\bar{\alpha}) > 0$ . Отметим, что оценка сверху параметра регуляризации при выборе его по принципу невязки ( $h = 0$ ) была получена для уравнений типа свертки в работе [56], а затем была обобщена в работе [38]. Для простоты будем считать, что  $\overline{A_h Z} = U$ , т.е.  $\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$  можно положить равным нулю (случай  $\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) > 0$  рассматривается совершенно аналогично с заменой  $\delta$  на  $\delta + \mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$ ).

*Л е м м а 6* [38]. Пусть  $D = Z, z_\eta^\alpha \neq 0$ . Тогда справедливы неравенства

$$\alpha \leq \frac{\|A_h\| \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|}{\|z_\eta^\alpha\|}, \quad (22)$$

$$\alpha \leq \frac{\|A_h\|^2 \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|}{\|u_\delta\| - \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|}. \quad (23)$$



**Доказательство.** Поскольку  $z_\eta^\alpha$  — экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$ , то на элементах вида  $(1-\gamma)z_\eta^\alpha$ ,  $\gamma \in (-\infty, +\infty)$ , функционал  $M^\alpha[z]$  достигает минимума при  $\gamma = 0$ ; следовательно, для любого  $\gamma \in (-\infty, +\infty)$

$$0 \leq M^\alpha[(1-\gamma)z_\eta^\alpha] - M^\alpha[z_\eta^\alpha].$$

Оценим сверху  $M^\alpha[(1-\gamma)z_\eta^\alpha]$  при  $\gamma \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} M^\alpha[(1-\gamma)z_\eta^\alpha] &= \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta - \gamma A_h z_\eta^\alpha\|^2 + \alpha(1-\gamma)^2 \|z_\eta^\alpha\|^2 \leq \\ &\leq \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2 + 2\gamma(\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\| \|A_h z_\eta^\alpha\| - \\ &- \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2) + \gamma^2(\|A_h z_\eta^\alpha\|^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$0 \leq M^\alpha[(1-\gamma)z_\eta^\alpha] - M^\alpha[z_\eta^\alpha] \leq 2\gamma(\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\| \|A_h z_\eta^\alpha\| - \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2) + \gamma^2(\|A_h z_\eta^\alpha\|^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha\|^2).$$

Сокращая полученное неравенство на  $\gamma > 0$  и устремляя  $\gamma$  к нулю справа, получим

$$\alpha \leq \frac{\|A_h z_\eta^\alpha\| \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|}{\|z_\eta^\alpha\|^2},$$

откуда легко следует (22).

Остается заметить, что  $\|z_\eta^\alpha\| \geq \|A_h z_\eta^\alpha\| / \|A_h\| \geq (\|u_\delta\| - \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|) / \|A_h\|$  и что  $\|u_\delta\| > \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|$ , ибо в противном случае получим  $M^\alpha[0] \leq M^\alpha[z_\eta^\alpha]$ , что противоречит условию  $z_\eta^\alpha \neq 0$ . Подставляя в (22) оценку снизу для  $z_\eta^\alpha$ , получим (23).

**С л е д с т в и е.** Если

$$\tilde{\alpha} = \frac{\|A_h\|^2 C \delta}{\|u_\delta\| - C \delta}, \quad C = \text{const} \geq 1, \quad (24)$$

то  $\beta_\eta(\tilde{\alpha}) \geq C^2 \delta^2$ .

Действительно, если  $\beta_\eta(\alpha) = C^2 \delta^2$ , то, подставляя  $\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\| = C\delta$  в (23), получаем верхнюю оценку  $\tilde{\alpha}$  параметра регуляризации при выборе его по принципу невязки ( $h=0$ ). Если  $C=1$ , то уравнение  $\beta_\eta(\alpha) = \delta^2$  может иметь решение и при  $\alpha=0$  [36], что показывает отсутствие оценки снизу для  $\alpha$  без дополнительных предположений.

**Л е м м а 7** [202]. Пусть точное решение уравнения (1) есть  $\bar{z} \neq 0$ ,  $\|u_\delta - A\bar{z}\| \leq \delta$  и  $\|u_\delta\|/\delta > C > 1$ ,  $C = \text{const}$ , для всех  $\delta \in (0, \delta_0]$ . Тогда  $\alpha^* \leq \bar{\alpha}$ , где

$$\bar{\alpha} = \|A_h\| \left( h + \frac{\sqrt{h^2 + (\tilde{\alpha} + h^2)(C^2 - 1) + h}}{C^2 - 1} \right);$$

здесь  $\tilde{\alpha}$  определяется формулой (24).

**Доказательство.** Из (22) имеем

$$\alpha^* \leq \frac{\|A_h\| \|A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta\|}{\|z_\eta^{\alpha^*}\|} = \|A_h\| \frac{\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|}{\|z_\eta^{\alpha^*}\|} = \|A_h\| \left( h + \frac{\delta}{\|z_\eta^{\alpha^*}\|} \right).$$

Для оценки снизу  $\|z_\eta^{\alpha^*}\|$  воспользуемся тем, что  $z_\eta^{\tilde{\alpha}}$  — экстремаль функционала  $M^{\tilde{\alpha}}[z]$ :

$$\begin{aligned} 0 < C^2 \delta^2 \leq \beta_\eta(\tilde{\alpha}) &\leq \|A_h z_\eta^{\tilde{\alpha}} - u_\delta\|^2 + \tilde{\alpha} \|z_\eta^{\tilde{\alpha}}\|^2 \leq \\ &\leq \|A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta\|^2 + \tilde{\alpha} \|z_\eta^{\alpha^*}\|^2 = \\ &= (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\|)^2 + \tilde{\alpha} \|z_\eta^{\alpha^*}\|^2 = (h^2 + \tilde{\alpha}) \|z_\eta^{\alpha^*}\|^2 + 2h\delta \|z_\eta^{\alpha^*}\| + \delta^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|z_\eta^{\alpha^*}\| \geq \delta \frac{C^2 - 1}{\sqrt{h^2 + (C^2 - 1)(\tilde{\alpha} + h^2)} + h}.$$

Подставляя оценку для  $\|z_\eta^{\alpha^*}\|$  в оценку для  $\alpha^*$ , получим утверждение леммы.

Рассмотрим подробнее вопрос реализации метода Ньютона для решения уравнения (19). Вообще говоря, метод Ньютона применим лишь в случае начального приближения, достаточно близкого к корню  $\alpha^*$  уравнения (19) (поскольку  $(\rho_\eta^k(\alpha))' > 0$  и существует  $(\rho_\eta^k(\alpha))''$ , непрерывная при  $\alpha > 0$  [91]). Функция  $\sigma_\eta^k(\lambda) = \rho_\eta^k(1/\lambda)$  выпукла по  $\lambda > 0$ , если  $h = 0$ , поэтому итерационный процесс метода Ньютона удобно строить по формуле

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{\sigma_\eta^k(\lambda_n)}{(\sigma_\eta^k(\lambda_n))'}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

или

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 (\rho_\eta^k(\alpha_n))'}{\alpha_n + \rho_\eta^k(\alpha_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (25)$$

В качестве начального приближения  $\alpha_0$  можно взять  $\bar{\alpha}$ , указанное в лемме 7. Если  $h = 0$ , то последовательность  $\alpha_n$ , получаемая по формуле (25), будет сходиться к  $\alpha^*$  (в этом случае в качестве начального приближения  $\alpha_0$  естественно взять  $\tilde{\alpha}$  из (24) при  $C = 1$ ). При  $h \neq 0$  гарантировать сходимости итерационного процесса нельзя. В этом случае при реализации решения уравнения (19) можно рекомендовать применение методов деления отрезка пополам или хорд [91], или комбинации этих методов с методом Ньютона. Методы отыскания корня (если он существует) обобщенной невязки  $\rho_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\|)^2$  аналогичны.

Заметим, что для отыскания экстремали сглаживающего функционала (или его конечно-разностной аппроксимации) при фиксированном  $\alpha > 0$  можно вместо решения уравнения Эйлера воспользоваться каким-либо методом минимизации дифференцируемого выпуклого функционала в гильбертовом пространстве (методом скорейшего спуска, сопряженных градиентов, Ньютона и т.п.). Подробное описание этих методов можно найти, например, в работах [32, 33, 93, 144, 146, 152, 191, 192].

Рассмотрим теперь случай  $D \neq Z$ . В этом случае  $\gamma_\eta(\alpha)$ ,  $\beta_\eta(\alpha)$ ,  $\rho_\eta^k(\alpha)$  не являются, вообще говоря, дифференцируемыми функциями для любого  $\alpha > 0$ . Выбор параметра регуляризации также может проводиться по обобщенному принципу невязки, т.е. из решения уравнения (19), однако для поиска корня уравнения (19) необходимо применять чис-

ленные методы, не требующие вычисления производных функций  $\rho_{\eta}^{\kappa}(\alpha)$ , такие как, например, метод хорд, метод деления отрезка пополам. При этом для отыскания  $z_{\eta}^{\alpha} \in D$  при фиксированном  $\alpha > 0$  необходимо применять градиентные методы минимизации сглаживающего функционала с ограничениями [43, 145].

Некоторые алгоритмы численной реализации обобщенного принципа невязки для задач как без ограничений, так и с простыми ограничениями будут рассмотрены ниже.

В настоящей работе мы совершенно не касаемся вопроса о решении неустойчивых экстремальных задач, рассматриваемого, например, в работах [14, 28, 33, 111, 117, 137, 171–173, 179]. В стороне остались также вопросы применения регуляризованных ньютоновских, квазиньютоновских и других итерационных методов [1, 15, 16, 30, 31, 44, 45, 80, 81, 154, 187, 188].

### § 5. Конечномерная аппроксимация некорректных задач

При решении некорректных задач обычно необходимо аппроксимировать исходную, чаще всего бесконечномерную задачу некоторой конечномерной задачей, для которой и будут разрабатываться вычислительные алгоритмы и программы для ЭВМ.

Мы рассмотрим вопрос о переходе к конечномерной аппроксимации на примере интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Мы не будем останавливаться на том, какие условия должны быть наложены, чтобы гарантировать сходимость конечномерных экстремалей аппроксимированного сглаживающего функционала к экстремали исходного функционала  $M^{\alpha}[z]$  при неограниченном увеличении размерности конечномерной задачи [90]. Можно рассматривать переход к конечномерной аппроксимации как внесение дополнительной погрешности в оператор и применять некоторую модификацию обобщенного принципа невязки [61]. В дальнейшем будем считать, что размерность конечномерной задачи выбрана настолько большой, что погрешность аппроксимации оператора  $A$  уравнения (1) значительно меньше погрешностей  $h$  и  $\delta$ .

Рассмотрим *интегральное уравнение Фредгольма первого рода*:

$$Az = \int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (26)$$

Будем предполагать, что  $K(x, s)$  — действительная функция, непрерывная в прямоугольнике  $\Pi = \{a \leq s \leq b, c \leq x \leq d\}$ . Будем также считать для простоты, что ядро  $K$  невырождено. Пусть вместо  $\bar{u} = A\bar{z}$  нам известно такое ее приближенное значение  $u_{\delta}$ , что  $\|u_{\delta} - \bar{u}\|_{L_2} \leq \delta$ , т.е.  $U = L_2[c, d]$ . Пусть из априорных соображений можно считать, что точное решение  $\bar{z}(s)$ , соответствующее  $\bar{u}(x)$ , есть гладкая функция на  $[a, b]$ . Например, будем считать что  $\bar{z}(s)$  непрерывна на  $[a, b]$  и имеет почти всюду производную, интегрируемую на  $[a, b]$  с квадратом. В этом случае естественно положить  $Z = W_2^1[a, b]$ .

Пусть вместо  $K(x, s)$  известна такая функция  $K_h(x, s)$ , что  $\|K - K_h\|_{L_2(\Pi)} \leq h$ . Тогда  $\|A - A_h\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq h$ , где  $A_h$  — интегральный оператор, соответствующий ядру  $K_h(x, s)$ .

Используя стандартную схему построения регуляризирующего алгоритма, мы получим приближенное решение  $z_\eta^{\alpha(\eta)} \in Z = W_2^1[a, b]$ , которое при  $\eta \rightarrow 0$  сходится к  $\bar{z}$  в норме пространства  $W_2^1[a, b]$ . Из теоремы вложения Соболева [153] следует, что  $z_\eta^{\alpha(\eta)}$  при  $\eta \rightarrow 0$  сходится к  $\bar{z}$  равномерно на  $[a, b]$ , т.е.

$$\max_{a \leq s \leq b} |z_\eta^{\alpha(\eta)}(s) - \bar{z}(s)| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

В описанной постановке функционал  $M^\alpha[z]$  для задачи (26) имеет вид

$$\begin{aligned} M^\alpha[z] &= \|A_h z - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2 = \\ &= \int_c^d \left[ \int_a^b K_h(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b \{z^2(s) + [z'(s)]^2\} ds. \end{aligned} \quad (27)$$

При построении конечно-разностной аппроксимации для простоты будем исходить из выражения (27) для сглаживающего функционала.

Для этого прежде всего выберем сетки  $\{s_j\}_{j=1}^n$  и  $\{x_i\}_{i=1}^m$  соответственно на отрезках  $[a, b]$  и  $[c, d]$ . После этого, пользуясь каким-либо квадратурными формулами, например формулами метода трапеций, можем построить конечно-разностный аналог оператора  $A$  интегрального уравнения (26). Конечно-разностный оператор (который мы также будем обозначать через  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  там, где это не вызывает недоразумений) является линейным оператором с матрицей  $A = \{a_{ij}\}$ . Простейший вариант аппроксимации, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, дается формулами

$$\begin{aligned} a_{ij} &= K_h(x_i, s_j), \quad j = 2, \dots, n-1; \quad a_{ij} = K_h(x_i, s_j)/2, \quad j = 1, n; \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Для завершения перехода к конечномерной задаче теперь достаточно аппроксимировать интегралы, входящие в квадраты норм в пространствах  $W_2^1$  и  $L_2$ . Будем считать для простоты, что сетки равномерны с шагами  $h_s$  и  $h_x$ . Обозначим  $z(s_j) = z_j$ ,  $u_\delta(x_i) = u_i$ . Используя для аппроксимации интегралов формулы прямоугольников, получим

$$\begin{aligned} \int_c^d \left[ \int_a^b K_h(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx &\approx \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j h_s - u_i \right]^2 h_x; \\ \int_a^b [z(s)]^2 ds &\approx \sum_{j=1}^n z_j^2 h_s; \\ \int_a^b [z'(s)]^2 ds &\approx \sum_{j=2}^n (z_j - z_{j-1})^2 / h_s. \end{aligned}$$

Теперь можем легко выписать условия минимума по переменным  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , функционала

$$\begin{aligned} \hat{M}^\alpha[z] &= \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j h_s - u_i \right]^2 h_x + \\ &+ \alpha \sum_{j=1}^n z_j^2 h_s + \alpha \sum_{j=2}^n (z_j - z_{j-1})^2 / h_s, \end{aligned}$$

аппроксимирующего (27):

$$h_x h_s \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{i1} \right] z_k + \alpha h_s z_1 - \alpha \frac{z_2 - z_1}{h_s} = \sum_{i=1}^m a_{i1} u_i h_x h_s;$$

$$h_x h_s \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{ij} \right] z_k + \alpha h_s z_j - \alpha \frac{z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}}{h_s} =$$

$$= \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i h_x h_s, \quad j=2, 3, \dots, n-1;$$

$$h_x h_s \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{in} \right] z_k + \alpha h_s z_n - \alpha \frac{z_{n-1} - z_n}{h_s} = \sum_{i=1}^m a_{in} u_i h_x h_s.$$

Обозначим  $h_x \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{ij} = b_{jk}$ ,  $b_{jk}$  — элементы матрицы  $B$ ,  $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i h_x = f_j$  — компоненты вектора  $f$ . Таким образом, мы приходим к задаче решения системы уравнений

$$B^{\alpha} z = Bz + \alpha Cz = f, \quad (28)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_s^2} & 1 + \frac{2}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h_s^2} & 1 + \frac{1}{h_s^2} \end{bmatrix}.$$

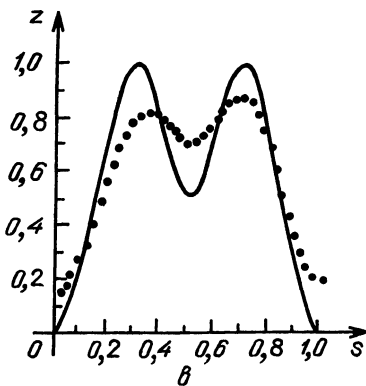
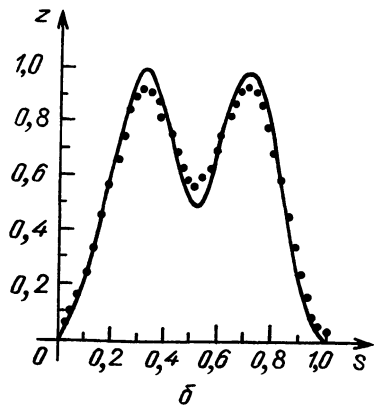
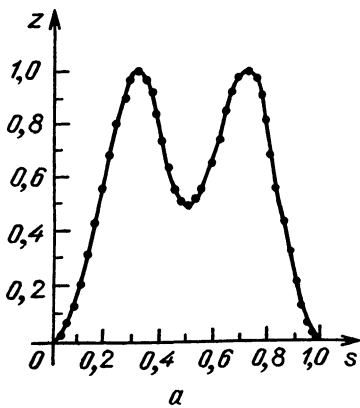
Заметим, что если рассматривать оператор  $A$  интегрального уравнения (26) как действующий из  $L_2[a, b]$  в  $L_2[c, d]$  (информация о гладкости точного решения  $\bar{z}(s)$  отсутствует), то сглаживающий функционал принимает вид

$$M^{\alpha}[s] = \|A_h z - u_{\delta}\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{L_2}^2,$$

и уравнение для его экстремали после перехода к конечно-разностной аппроксимации записывается в форме (28) с матрицей

$$C = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

К системе уравнений (28) можно прийти, исходя из уравнений Эйлера  $A_h^* A_h z - A_h^* u_{\delta} + \alpha z = 0$  в  $W_2^1[a, b]$ . Здесь  $A_h$  — оператор из  $W_2^1[a, b]$  в



Р и с. 1.2. Результаты модельного расчета с помощью решения уравнения Эйлера и выбора параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки при следующих уровнях погрешностей:

- а)  $h^2 = 10^{-10}$ ,  $\delta^2 = 10^{-8}$ ;
- б)  $h^2 = 2,24 \times 10^{-7}$ ,  $\delta^2 = 6,41 \times 10^{-6}$ ;
- в)  $h^2 = 2,24 \times 10^{-7}$ ,  $\delta^2 = 3,14 \times 10^{-4}$

$L_2[a, b]$ ,  $A_n^*$  — оператор, сопряженный к  $A_n$ ,  $A_n^*: L_2[c, d] \rightarrow W_2^1[a, b]$ . Используя свойства оператора  $A_n^*$ :  $L_2 \rightarrow W_2^1$  [165, 181] и переходя в уравнении Эйлера к конечно-разностной аппроксимации, нетрудно вновь получить систему уравнений (28).

В качестве иллюстрации рассмотрим результаты решения модельной задачи для уравнения (26). Пусть

$$a = 0, b = 1, c = -2, d = 2; K(x, s) = 1/(1 + 100(x - s)^2);$$

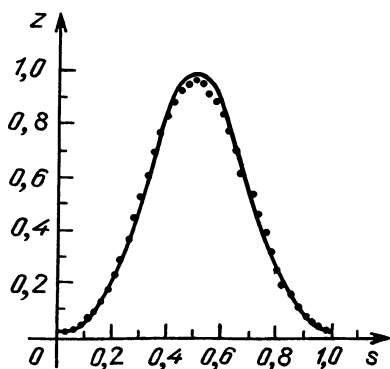
$$\bar{z}(s) = (\exp\{-s - 0,3\}^2/0,03) +$$

$$+ \exp\{-(s - 0,7)^2/0,03\})/10,9550408 - 0,052130913; n = m = 41.$$

Результаты расчетов на ЭВМ с помощью численного решения уравнения Эйлера и выбора параметра регуляризации в соответствии с обобщенным принципом невязки при различных уровнях погрешностей приведены на рис. 1.2 ( $\bar{z}(s)$  изображена сплошной линией, приближенное решение точками).

Для отыскания минимума функционала  $\hat{M}^\alpha[z]$  можно применять численные методы минимизации функционалов, например метод сопряжен-

Р и с. 1.3. Результаты модельного расчета с помощью минимизации функционала  $\hat{M}^\alpha[z]$  методом сопряженных градиентов при уровнях погрешностей  $h^2 = 2,24 \times 10^{-7}$ ,  $\delta^2 = 6,87 \times 10^{-6}$



ных градиентов. При этом можно рассматривать задачи с ограничениями ( $D \neq Z$ ). Подробнее о применении градиентных методов см. гл. 3, здесь же приведем лишь результат модельного расчета. Пусть  $\bar{z}(s) = \exp\{-(s - 0,5)^2/0,06\}$ , ядро  $K(x, s)$  и другие параметры указаны выше. Результаты расчета (рис. 1.3).

### § 6. Численные методы решения некоторых задач линейной алгебры

Для решения системы линейных уравнений (28) можно использовать различные численные методы. При этом следует учитывать, что матрица  $B^\alpha$  системы является симметричной и положительно определенной. Это позволяет использовать для решения (28) очень эффективные специальные методы.

В качестве одного из таких методов можно предложить метод квадратного корня [189]. Поскольку матрица  $B^\alpha$  с элементами  $b_{ij}^\alpha$  вещественна, симметрична и положительно определена, то она представима в виде произведения матриц  $(T^\alpha)^* T^\alpha$ , где  $T^\alpha$  — верхняя треугольная матрица:

$$T^\alpha = \begin{bmatrix} t_{11}^\alpha & t_{12}^\alpha & \dots & t_{1n}^\alpha \\ 0 & t_{22}^\alpha & \dots & t_{2n}^\alpha \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn}^\alpha \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы  $T^\alpha$  находятся последовательно по следующим формулам:

$$t_{11}^\alpha = \sqrt{b_{11}^\alpha}, \quad t_{1j}^\alpha = \frac{b_{1j}^\alpha}{t_{11}^\alpha}, \quad j = 2, 3, \dots, n;$$

$$t_{ii}^\alpha = \{ b_{ii}^\alpha - \sum_{k=1}^{i-1} (t_{ki}^\alpha)^2 \}^{1/2}, \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

$$t_{ij}^\alpha = \frac{b_{ij}^\alpha - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^\alpha t_{kj}^\alpha}{t_{ii}^\alpha}, \quad i < j; \quad t_{ij}^\alpha = 0, \quad i > j. \quad (29)$$

Система (28) принимает вид

$$(T^\alpha)^* T^\alpha z^\alpha = f.$$

Введя обозначение  $y^\alpha = T^\alpha z^\alpha$ , можно заменить уравнение (28) эквивалентно двумя другими:

$$(T^\alpha)^* y^\alpha = f, \quad T^\alpha z^\alpha = y^\alpha.$$

Каждое из этих уравнений решается элементарно, так как имеет треугольную матрицу. В [189] приведены экономичные стандартные программы решения систем линейных уравнений методом квадратного корня.

При отыскании корня невязки или обобщенной невязки систему уравнений (28) приходится решать неоднократно при различных  $\alpha > 0$ . При этом матрица  $B^\alpha$  системы (28) зависит от  $\alpha$  специальным образом, а правая часть вообще не изменяется. Это позволяет строить специальные экономичные методы многократного решения системы (28) (см. [41]).

Пусть для различных  $\alpha > 0$  необходимо решать систему уравнений

$$(A_h^* A_h + \alpha C) z^\alpha = A_h^* u.$$

Здесь  $A_h$  — действительная матрица порядка  $m \times n$ ,  $z^\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$ ,  $C$  — симметричная положительно определенная матрица,  $A_h^*$  — матрица, транспонированная к  $A_h$ .

Пользуясь методом квадратного корня, по формулам (29) трехдиагональную матрицу  $C$  можно представить в виде  $C = S^* S$  (отметим, что матрица  $S$  будет двухдиагональной). Сделав замену  $y^\alpha = S z^\alpha$  ( $z^\alpha = S^{-1} y^\alpha$ ), получим

$$(A_h^* A_h + \alpha C) S^{-1} y^\alpha = A_h^* u.$$

Умножая это уравнение слева на  $(S^{-1})^*$ , получим

$$(D^* D + \alpha E) y^\alpha = D^* u, \quad D = A_h S^{-1}.$$

Представим матрицу  $D$  в виде  $D = QPR$ , где  $Q$  — ортогональная матрица порядка  $m \times m$ ,  $R$  — ортогональная матрица порядка  $n \times n$ ,  $P$  — правая двухдиагональная матрица порядка  $m \times n$  (матрица  $P$  имеет отличными от нуля лишь элементы  $p_{ii}, p_{i,i+1}$ ). Для построения такого разложения достаточно найти такие  $Q^{-1}, R^{-1}$ , чтобы матрица  $P = Q^{-1} D R^{-1}$  была двухдиагональной.

Матрицы  $Q^{-1}, R^{-1}$  можно искать, например, в виде  $Q^{-1} = Q_n \dots Q_2 Q_1$ ,  $R^{-1} = R_1 R_2 \dots R_n$ , где  $Q_i, R_i$  — матрицы операторов отражения ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (см. [40]), удовлетворяющие равенствам  $Q_i = Q_i^* = Q_i^{-1}$ ,  $R_i = R_i^* = R_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тем самым  $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ,  $R = R_n R_{n-1} \dots R_1$ .

Матрицы  $Q_i, R_i$  будем строить следующим образом. Пусть  $a_1$  — первый столбец матрицы  $D$ . Матрицу  $Q_1$  будем искать из условия обращения в нуль всех элементов, начиная со второго, в первом столбце матрицы  $Q_1 D$ , т.е. если  $q_j$  — строки матрицы  $Q$ , то  $(q_j, a_1) = 0$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$ ;  $q_j \in \mathbb{R}^m$ . Матрицей, удовлетворяющей этому условию, будет являться матрица оператора отражения [40] с образующим вектор-столбцом

$$g^{(1)} = \frac{(a_1 - \|a_1\| l)}{\|a_1 - \|a_1\| l\|},$$



где  $l$  – вектор-столбец из  $\mathbf{R}^m$  с координатами  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ . Таким образом,

$$Q_1 = E - 2g^{(1)}(g^{(1)})^*.$$

Теперь матрицу  $R_1$  будем выбирать так, чтобы в  $(Q_1 D)R_1$ , во-первых, остались ненулевыми элементы первого столбца, начиная со второго, и, во-вторых, элементы первой строки, начиная с третьего, были нулями. Первому требованию можно удовлетворить, если искать  $R_1$  в виде

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{R}_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Пусть  $\tilde{b}_1$  – первая строка матрицы  $Q_1 D$  без первого элемента,  $\tilde{b}_1 \in \mathbf{R}^{n-1}$ . Тогда второе условие будет означать, что  $(\tilde{b}_1, v_i) = 0$ ,  $v_i$  – столбцы матрицы  $\tilde{R}_1$ ,  $v_i \in \mathbf{R}^{n-1}$  ( $i = 3, 4, \dots, n$ ). Следовательно,  $\tilde{R}_1$  – матрица отражения с образующим вектором

$$\tilde{h} = \frac{\tilde{b}_1 - \|\tilde{b}_1\| l}{\|\tilde{b}_1 - \|\tilde{b}_1\| l\|} \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

Но тогда  $R_1$  будет матрицей отражения с образующим вектором  $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h} \end{pmatrix} = h^{(1)} \in \mathbf{R}^n$ .

Далее, так же будем искать  $Q_i, R_i$  в виде

$$Q_i = \begin{bmatrix} E^{(i-1)} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_i \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} E^{(i)} & 0 \\ 0 & \tilde{R}_i \end{bmatrix},$$

где  $\tilde{Q}_i, \tilde{R}_i$  – матрицы отражения в пространствах меньшей размерности. Заметим, что производить перемножение матриц  $Q_i$  и  $R_i$  для получения  $Q$  и  $R$  нет необходимости. Достаточно запомнить образующие векторы  $g^{(i)}$  и  $h^{(i)}$  и результат действия операторов  $Q_i$  и  $R_i$  на вектор  $w$  вычислять по формулам

$$Q_i w = w - 2g^{(i)}(g^{(i)}, w), \quad R_i w = w - 2h^{(i)}(h^{(i)}, w).$$

Итак, пусть найдены такие матрицы  $P, Q, R$ , что  $D = QPR$ . Теперь в уравнении  $(D^* D + \alpha E)y^\alpha = D^* u$  сделаем замену переменных  $x^\alpha = R y^\alpha$  ( $y^\alpha = R^{-1} x^\alpha$ ). Получим  $(R^* P^* Q^* QPR + \alpha E)R^{-1} x^\alpha = D^* u$  или  $(P^* P + \alpha E) \times \times x^\alpha = R D^* u = f$ . Матрица  $P^* P$  трехдиагональная, и последнее уравнение без труда решается с использованием порядка  $n$  операций, например методом прогонки [151]. Обратный переход от переменных  $x^\alpha$  к переменным  $z^\alpha$  осуществляется оператором  $S^{-1} R^{-1}$ . Однако этот переход к переменной  $z^\alpha$  часто нет необходимости делать при каждом  $\alpha$ . Например, если  $h = 0$  и выбор  $\alpha$  производится по принципу невязки, то необходимо только проверять условие  $\|A_h z^\alpha - u\| = \delta$ , которое эквивалентно условию  $\|P x^\alpha - Q^* u\| = \delta$ , так как  $\|P x^\alpha - Q^* u\| = \|A_h z^\alpha - u\|$ . В гл. 4 рассмотрены программы, реализующие описанный алгоритм.

## § 7. Уравнения типа свертки

Даже при решении на больших ЭВМ одномерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода размерности сеток по каждой из переменных не могут превышать 80–100 точек. Для уравнений типа свертки, которые будут рассмотрены ниже, оказывается возможным построить численные методы, позволяющие решать одномерные уравнения типа свертки на сетках более чем из 1000 точек, используя лишь оперативную память ЭВМ средней мощности. При этом учитывается специфический вид уравнений типа свертки и применяется преобразование Фурье (для некоторых других типов уравнений 1-го рода с ядрами специального вида эффективно применяются другие интегральные преобразования, см. [82, 143, 178]). Разработка численных методов специально для уравнений 1-го рода типа свертки началась в работах [53, 56, 156–158, 178].

В настоящем параграфе будут рассмотрены методы решения одномерных и двумерных уравнений типа свертки. Рассмотрим часто встречающееся в приложениях (примеры физических задач см. в [71, 178]) интегральное уравнение 1-го рода

$$Az = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)z(s)ds = u(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (30)$$

Пусть входящие в уравнение функции удовлетворяют требованиям

$$K(y) \in L_1(-\infty, +\infty) \cap L_2(-\infty, +\infty), \quad u(x) \in L_2(-\infty, +\infty),$$

$$z(s) \in W_2^1(-\infty, +\infty),$$

т.е.  $A: W_2^1 \rightarrow L_2$ . Будем также предполагать, что ядро  $K(y)$  замкнуто, т.е.  $A$  – взаимно однозначный оператор. Будем рассматривать задачу (30) без ограничений ( $D=Z$ ). Пусть некоторой функции  $\bar{u}(x)$  соответствует единственное решение уравнения (30) – функция  $\bar{z}(s) \in W_2^1$ , причем известны не сама функция  $\bar{u}(x)$  и оператор  $A$ , а заданные с известными погрешностями  $\delta > 0$ ,  $h \geq 0$  такие функция  $u_\delta(x)$  и оператор  $A_h$  типа свертки с ядром  $K_h(y)$ , что

$$\|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2} \leq \delta, \quad \|A - A_h\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq h.$$

Рассмотрим сглаживающий функционал

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2.$$

Поскольку  $W_2^1(-\infty, +\infty)$  – гильбертово пространство, то (см. § 1) для любого  $\alpha > 0$  и любого  $u_\delta \in L_2$  существует единственный элемент  $z_\eta^\alpha(s)$ , реализующий минимум функционала  $M^\alpha[z]$ . Если выбор параметра регуляризации производить по обобщенному принципу невязки (см. § 2), то  $z_\eta^{\alpha(\eta)}(s)$  при  $\eta \rightarrow 0$  стремится к точному решению уравнения (30) по норме  $W_2^1$ . Пространство  $W_2^1[a, b]$  компактно вложено в пространство  $C[a, b]$  для любого отрезка  $[a, b]$  (см. [153]), поэтому  $z_\eta^{\alpha(\eta)}(s)$  равномерно сходится к  $\bar{z}(s)$  на каждом замкнутом отрезке вещественной оси.

Воспользовавшись теоремой о свертке, равенством Планшереля [23] и проварьировав функционал  $M^\alpha[z]$  на множестве функций из  $W_2^1$ ,

получим [3, 178]

$$z_{\eta}^{\alpha}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}_h^*(\omega) \tilde{u}_{\delta}(\omega) e^{-i\omega s}}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} d\omega, \quad (31)$$

где  $\tilde{K}_h^*(\omega) = \tilde{K}_h(-\omega)$ ,  $L(\omega) = |\tilde{K}_h(\omega)|^2 = \tilde{K}_h^*(\omega) \tilde{K}_h(\omega)$ , а  $\tilde{K}_h(\omega)$ ,  $\tilde{u}_{\delta}(\omega)$  – фурье-образы функций  $K_h(y)$ ,  $u_{\delta}(x)$ ; например,

$$\tilde{u}_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\delta}(x) e^{i\omega x} dx.$$

Если выражение для  $\tilde{u}_{\delta}(\omega)$  подставить в (31) и поменять пределы интегрирования, то  $z_{\eta}^{\alpha}(s)$  примет вид

$$z_{\eta}^{\alpha}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^{\alpha}(x-s) u_{\delta}(x) dx, \quad (32)$$

где ядро обращения  $K^{\alpha}(t)$  имеет вид

$$K^{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}_h^*(\omega) e^{i\omega t}}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} d\omega.$$

Ввиду того, что обычно  $u_{\delta}(x)$  при решении практических задач имеет ограниченный носитель, интегрирование в (32) ведется лишь по области, где  $u_{\delta}(x)$  отлична от нуля. Таким образом, для отыскания  $z_{\eta}^{\alpha}(s)$  при фиксированном  $\alpha$  достаточно найти численно фурье-образ ядра  $\tilde{K}_h(\omega)$ , а затем построить ядро обращения  $K^{\alpha}(t)$ , используя стандартные программы вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций, и применить формулу (32). Вопрос о выборе параметра регуляризации  $\alpha$  рассмотрен в § 2. Рассмотрим случай, когда решение и ядро уравнения имеют локальные носители. В этом случае уравнение (30) запишется в виде

$$Az = \int_0^{2a} K(x-s) z(s) ds = u(x), \quad x \in [0, 2a]; \quad (33)$$

$$A: W_2^1[0, 2a] \rightarrow L_2[0, 2a].$$

Оператор  $A$  (ядро  $K(y)$ ) может быть задан как точно, так и приближенно. Пусть выполнены следующие условия на носители входящих в уравнение функций:

$$\text{supp} K(y) \subseteq \left[ -\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right], \quad \text{supp} z(s) \subseteq \left[ a - \frac{l_2}{2}, a + \frac{l_2}{2} \right],$$

где  $a > 0$ ,  $l > 0$ ,  $l_2 \geq 0$ ,  $2l + l_2 \leq 2a$  ( $l_2$  – длина носителя решения  $z(s)$ ).

**Л е м м а 8.** Пусть  $u(x) \in AW_2^1[0, 2a]$ ,  $A \neq 0$ . Тогда решение (33) единственно.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточно доказать, что однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. Предположим, что это не так. Тогда найдется такая функция  $z(s) \neq 0$ , что

$$\int_0^{2a} K(x-s) z(s) ds = 0.$$

Поскольку  $K(y)$  и  $z(s)$  имеют локальные носители, то, доопределив указанные функции нулями на всей числовой оси и применив преобразование Фурье, получим

$$\tilde{K}(\omega)\tilde{z}(\omega) = 0,$$

где  $\tilde{K}(\omega)$ ,  $\tilde{z}(\omega)$  — образы функций  $K(y)$ ,  $z(s)$ . Функции  $K(y)$  и  $z(s)$  имеют локальные носители, поэтому  $\tilde{K}(\omega)$  и  $\tilde{z}(\omega)$  — аналитические функции (см. [23]) и, следовательно,  $z(s) \equiv 0$ . Лемма доказана.

В силу условий, наложенных на носители, после доопределения нулями функций  $z(s)$ ,  $u(x)$  на отрезке  $[0, 2a]$  и функции  $K(y)$  на отрезке  $[-a, a]$  их можно периодически продолжить с периодом  $2a$  на всю вещественную ось, причем уравнение (33) после этого также может рассматриваться на всей вещественной оси.

Теперь введем равномерные сетки по  $x$  и  $s$ :

$$x_k = s_k = k\Delta x, \quad \Delta x = 2a/n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(в дальнейшем  $n$  предполагается четным). Аппроксимируем уравнение (33) для простоты по формуле прямоугольников:

$$\sum_{j=0}^{n-1} K(x_k - s_j) z(s_j) \Delta x = u(x_k).$$

Обозначим  $u_k = u(x_k)$ ,  $z_j = z(s_j)$ ,  $K_{k-j} = K(x_k - s_j)$ ,  $T = 2a$ . Определим дискретное преобразование Фурье [17, 125] для функции  $f_k$  дискретной переменной  $k$  (периодичной с периодом  $n$ :  $f_{k+n} = f_k \quad \forall k$ ):

$$\tilde{f}_m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\omega_m x_k} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i2\pi(mk/n)},$$

$$m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Здесь  $\omega_m = m\Delta\omega$ ,  $\Delta\omega = 2\pi/T$ .

Обратное дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{f}_m e^{i\omega_m x_k},$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Доказательство этого факта непосредственно следует из соотношения

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi i(mk/n)} = \begin{cases} n, & \text{если } k \text{ делится на } n; \\ 0, & \text{если } k \text{ не делится на } n. \end{cases}$$

Из этого равенства следует также равенство Планшереля, которое мы запишем для вещественных  $f_k$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} |\tilde{f}_m|^2.$$

Точно так же легко получается аналог теоремы о свертке для дискретного преобразования Фурье, а именно

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} K_{k-j} z_j \Delta x \right) e^{-i\omega_m x_k} &= \Delta x \sum_{j=0}^{n-1} z_j \sum_{k=0}^{n-1} K_{k-j} e^{-2\pi i(mk/n)} = \\ &= \Delta x \sum_{j=0}^{n-1} z_j e^{-2\pi i(mj/n)} \sum_{p=-j}^{n-1-j} K_p e^{-2\pi i(mp/n)} = \Delta x \tilde{z}_m \tilde{K}_m. \end{aligned}$$

Здесь существенна периодичность  $K_p$  с периодом  $n$ .

Запишем теперь конечно-разностную аппроксимацию функционала  $M^\alpha[z]$  для уравнения (33):

$$\begin{aligned} \hat{M}^\alpha[z] &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} K_{k-j} z_j \Delta x - u_k \right)^2 \Delta x + \\ &+ \alpha \sum_{k=0}^{n-1} z_k^2 \Delta x + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (z'(x_k))^2 \Delta x. \end{aligned}$$

Здесь функция  $z(s)$  и значения  $\tilde{z}_m$  связаны соотношением

$$z(s) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{z}_m e^{i\omega_m s},$$

где  $\tilde{z}_m$  — дискретное преобразование Фурье от  $z_k$ . Тогда для коэффициентов дискретного преобразования Фурье вектора  $z'(x_k)$  будем иметь [133]

$$z'(x_k) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} i\omega_m \tilde{z}_m e^{i\omega_m x_k},$$

$$(\tilde{z}'(x_k)) = i\omega_m \tilde{z}_m; \quad k, m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Теперь функционал  $\hat{M}^\alpha[z]$ , аппроксимирующий  $M^\alpha[z]$ , легко представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{M}^\alpha[z] &= \frac{\Delta x}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (|\tilde{K}_m|^2 (\Delta x)^2 \tilde{z}_m \tilde{z}_m^* - 2\Delta x \tilde{K}_m \tilde{u}_m \tilde{z}_m^* + \\ &+ |\tilde{u}_m|^2 + \alpha(1 + \omega_m^2) \tilde{z}_m \tilde{z}_m^*). \end{aligned}$$

Отсюда минимум  $\hat{M}^\alpha$  достигается на векторе с коэффициентами дискретного преобразования Фурье [60]

$$\tilde{z}_m = \frac{\tilde{K}_m^* \tilde{u}_m \Delta x}{|\tilde{K}_m|^2 (\Delta x)^2 + \alpha(1 + (\pi/a)^2 m^2)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (34)$$

Применяя обратное дискретное преобразование Фурье, находим  $z_\eta^\alpha(s)$  в точках сетки  $s_k$ .

**З а м е ч а н и е.** Можно предложить несколько иную аппроксимацию функционала

$$M^\alpha[z] = \|A_n z - u_\delta\|_{L_2[0, 2a]}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1[0, 2a]}^2,$$

основанную на другой аппроксимации выражения  $\Omega_1 = \int_0^{2a} (z'(s))^2 ds$ .

Аппроксимируем  $\Omega_1$  выражением

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_1 &= \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{z_{k+1} - z_k}{\Delta x} \right)^2 = \frac{\Delta x}{n} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{k=0}^{n-1} |\widetilde{z_{k+1}} - \widetilde{z_k}|^2 = \\ &= \frac{\Delta x}{n} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{m=0}^{n-1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) e^{-i\omega_m x_k} \right|^2 = \\ &= \frac{\Delta x}{n} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{m=0}^{n-1} \left| \sum_{p=1}^n z_p e^{-i\omega_m (x_p - \Delta x)} - \widetilde{z_m} \right|^2 = \\ &= \frac{\Delta x}{n} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{m=0}^{n-1} \left| \widetilde{z_m} - e^{i\omega_m \Delta x} \widetilde{z_m} \right|^2 = \\ &= \frac{\Delta x}{n} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{m=0}^{n-1} |\widetilde{z_m}|^2 |1 - e^{i\omega_m \Delta x}|^2 = \\ &= \frac{\Delta x}{n} \sum_{m=0}^{n-1} |\widetilde{z_m}|^2 \left| \frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\omega_m \Delta x}{2} \right|^2 = \\ &= \frac{\Delta x}{n} \sum_{m=0}^{n-1} |\widetilde{z_m}|^2 \left( \frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\pi m}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

При использовании такой аппроксимации в выражениях для экстремали (34), а также в приведенных ниже выражениях для функций  $\rho_\eta^k$ ,  $\Phi_\eta$ ,  $\gamma_\eta$ ,

$\beta_\eta$  нужно заменить выражение  $1 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2$  на  $1 + \left(\frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\pi m}{n}\right)^2$ .

Описанный выше метод допускает простую и быстроедействующую программную реализацию, поскольку существуют методы быстрого преобразования Фурье [207, 125, 193], для которых созданы стандартные программы [142]. При использовании обобщенного принципа невязки для выбора параметра регуляризации необходимы функции  $\gamma_\eta$ ,  $\beta_\eta$ , которые в рассматриваемом случае могут быть вычислены по формулам

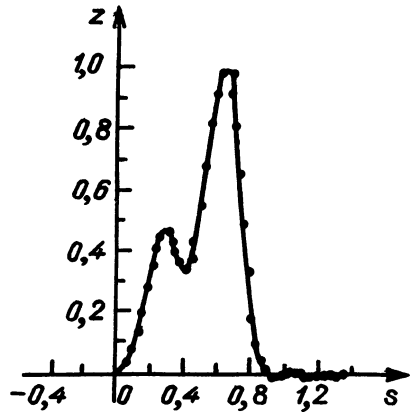
$$\gamma_\eta(\alpha) = \frac{\Delta x}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{|\widetilde{K_m}|^2 (\Delta x)^2 |\widetilde{u_m}|^2 (1 + (\pi m/a)^2)}{[|\widetilde{K_m}|^2 (\Delta x)^2 + \alpha (1 + (\pi m/a)^2)]^2},$$

$$\beta_\eta(\alpha) = \frac{\Delta x}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\alpha^2 (1 + (\pi m/a)^2) |\widetilde{u_m}|^2}{[|\widetilde{K_m}|^2 (\Delta x)^2 + \alpha (1 + (\pi m/a)^2)]^2}.$$

Производная функция  $\gamma_n(\alpha)$  легко вычисляется по формуле

$$\gamma_n'(\alpha) = - \frac{2\Delta x}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{|\tilde{K}_m|^2 (\Delta x)^2 |\tilde{u}_m|^2 (1 + (\pi m/a)^2)^2}{[|\tilde{K}_m|^2 (\Delta x)^2 + \alpha(1 + (\pi m/a)^2)]^3}.$$

Производные функций  $\beta_n(\alpha)$ ,  $\rho_n^k(\alpha)$  могут быть вычислены с помощью формул (21).



Р и с. 1.4. Модельная задача для одномерного уравнения типа свертки

В качестве примера применения описанных выше методов рассмотрим следующую модельную задачу.

Пусть дано уравнение

$$\int_0^1 K(x-s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [0, 2], \quad K(y) = \exp\{-80(y-0,5)^2\},$$

с локальным носителем  $(0, 1)$ ,

$$\bar{z}(s) = ((\exp\{-(s-0,3)^2/0,03\} + \exp\{-(s-0,7)^2/0,03\})/0,9550408 - 0,052130913)1,4 \cdot s.$$

Результаты расчета модельной задачи при уровнях погрешностей  $h^2 = 6,73 \times 10^{-9}$ ,  $\delta^2 = 1,56 \times 10^{-6}$  приведены на рис. 1.4.

Рассмотрим теперь двумерное интегральное уравнение типа свертки

$$Az = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s, y-t)z(s,t)dsdt = u(x,y), \quad (35)$$

$$-\infty < x, y < +\infty.$$

Пусть ядро уравнения  $K(v, w)$  и правая часть  $u(x, y)$  принадлежат  $L_2 [(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)]$ , а точное решение  $\bar{z}(s, t) \in W_2^2 [(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)]^*$ , оператор  $A$  непрерывен и однозначен. Пусть вместо точно

\*) Пространство  $W_2^2$  — пространство функций, имеющих обобщенные производные второго порядка, интегрируемые с квадратом. Из теорем вложения [153] вытекает, что из сходимости в норме  $W_2^2$  следует сходимость, равномерная на любом прямоугольнике  $[a, b] \times [c, d]$ . Это и определяет выбор  $Z = W_2^2$ .

известных  $\bar{u}$  и ядра  $K$  известны их приближенные значения  $u_\delta$  и  $K_h$  такие, что

$$\|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2} \leq \delta, \quad \|A - A_h\|_{W_2^2 \rightarrow L_2} \leq h.$$

Рассмотрим функционал Тихонова

$$M^\alpha[z] = \|A_h - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^2}^2.$$

Для любого  $\alpha > 0$  существует единственная экстремаль функционала Тихонова  $z_\eta^\alpha$ , реализующая минимум  $M^\alpha[z]$ . При выборе параметра  $\alpha = \alpha(\eta)$  по обобщенному принципу невязки (см. § 2)  $z_\eta^{\alpha(\eta)}$  стремится при  $\eta \rightarrow 0$  к точному решению задачи в норме  $W_2^2$ , а следовательно, [153] и равномерно на каждом прямоугольнике  $[a, b] \times [c, d]$ . Как и для одномерных уравнений, легко выписать экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$ :

$$z_\eta^\alpha(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}^*(\omega, \Omega) \tilde{u}_\delta(\omega, \Omega) e^{i\omega s + i\Omega t}}{L(\omega, \Omega) + \alpha(1 + (\omega^2 + \Omega^2)^2)} d\omega d\Omega,$$

где  $\tilde{K}_h^*(\omega, \Omega) = \tilde{K}_h(-\omega, -\Omega)$ ,  $L(\omega, \Omega) = |\tilde{K}_h(\omega, \Omega)|^2$ ,  $\tilde{K}_h(\omega, \Omega)$ ,  $\tilde{u}_\delta(\omega, \Omega)$  — фурье-образы  $K_h(v, w)$  и  $u_\delta(x, y)$ , определяемые как

$$\tilde{u}_\delta(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_\delta(x, y) e^{-i\omega x - i\Omega y} dx dy,$$

$$\tilde{K}_h(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_h(v, w) e^{-i\omega v - i\Omega w} dv dw.$$

Можно выразить  $z_\eta^\alpha(s, t)$  в виде, аналогичном (32):

$$z_\eta^\alpha(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(x-s, y-t) u_\delta(x, y) dx dy,$$

где

$$K^\alpha(v, w) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}_h^*(\omega, \Omega) e^{-i\omega v - i\Omega w}}{L(\omega, \Omega) + \alpha(1 + (\omega^2 + \Omega^2)^2)} d\omega d\Omega.$$

Будем теперь рассматривать случай, когда точное решение  $\bar{z}(s, t)$  и ядро  $K(v, w)$  имеют локальные носители:

$$\text{supp } K(v, w) \subseteq [l_1, L_1] \times [l_2, L_2],$$

$$\text{supp } \bar{z}(s, t) \subseteq [a, A] \times [b, B];$$

тогда для  $\bar{u}(x, y)$  имеем  $\text{supp } \bar{u}(x, y) \subseteq [c, C] \times [d, D]$ , где  $c = a + l_1$ ,  $C = A + L_1$ ,  $d = b + l_2$ ,  $D = B + L_2$ . Будем считать, что приближенная правая часть  $u_\delta(x, y)$  имеет локальный носитель  $[c, C] \times [d, D]$ , а приближенное решение  $[a, A] \times [b, B]$ .



Аналогично рассмотрению, проведенному для одномерных уравнений, перейдем к уравнению

$$\int_0^{2R} \int_0^{2r} K(x-s, y-t) z(s, t) ds dt = u(x, y), \quad (36)$$

в котором локальные носители  $z(s, t)$  и  $u(x, y)$  лежат внутри прямоугольника  $[0, 2r] \times [0, 2R]$ , а сами  $z$  и  $u$  доопределены нулями вне их носителей на этом прямоугольнике.

Проделав аналогичную процедуру с  $K(v, w)$ , будем считать все функции периодически продолженными (с периодом  $2r$  по первому аргументу и  $2R$  — по второму) и рассмотрим уравнение (36) на всей плоскости.

Введя равномерные сетки по  $(x, y)$  и  $(s, t)$

$$x_k = s_k = k \Delta x, \quad y_l = t_l = l \Delta y; \quad \Delta x = 2r/n_1, \quad \Delta y = 2R/n_2;$$

$$k = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \quad l = 0, 1, \dots, n_2 - 1$$

( $n_1$  и  $n_2$  будем считать четными), и аппроксимируя уравнение по формуле прямоугольников, получим

$$\sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} K_{k-m, l-j} z_{mj} \Delta x \Delta y = u_{kl},$$

где

$$u_{kl} = u(x_k, y_l), \quad z_{mj} = z(s_m, t_j), \quad K_{k-m, l-j} = K_h(x_k - s_m, y_l - t_j).$$

Дискретное преобразование Фурье определим как

$$\tilde{f}_{mn} = \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{n_2-1} f_{kl} e^{-i\omega_m x_k - i\Omega_n y_l}, \quad m = 0, 1, \dots, n_1 - 1;$$

$$n = 0, 1, \dots, n_2 - 1;$$

$$\omega_m = m \Delta \omega; \quad \Delta \omega = \frac{\pi}{r}; \quad \Omega_n = n \Delta \Omega; \quad \Delta \Omega = \frac{\pi}{R};$$

обратное преобразование имеет вид

$$f_{kl} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} \tilde{f}_{mn} e^{i\omega_m x_k + i\Omega_n y_l},$$

$$k = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \quad l = 0, 1, \dots, n_2 - 1.$$

Двумерный аналог равенства Планшереля имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{n_2-1} |f_{kl}|^2 = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} |\tilde{f}_{mn}|^2,$$

а теоремы о свертке

$$\sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{n_2-1} \left\{ \sum_{p=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} K_{k-p, l-j} z_{pj} \Delta x \Delta y \right\} e^{-i\omega_m x_k - i\Omega_n y_l} =$$

$$= \tilde{K}_{mn} \tilde{z}_{mn} \Delta x \Delta y; \quad m = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \quad n = 0, 1, \dots, n_2 - 1.$$

Запишем конечно-разностную аппроксимацию функционала  $M^\alpha [z]$  для уравнения (35):

$$\begin{aligned} \hat{M}^\alpha [z] = & \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{n_2-1} \left( \sum_{p=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} K_{k-p, l-j} z_{pj} \Delta x \Delta y - u_{kl} \right)^2 \Delta x \Delta y + \\ & + \alpha \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{n_2-1} \left\{ z_{kl}^2 + \left[ \frac{\partial^2 z(s_k, t_l)}{\partial s^2} \right]^2 + 2 \left[ \frac{\partial^2 z(s_k, t_l)}{\partial s \partial t} \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial^2 z(s_k, t_l)}{\partial t^2} \right]^2 \right\} \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем параграфе, получим

$$\left( \frac{\partial^2 z(s_k, t_l)}{\partial s^2} \right) = -\omega_m^2 \tilde{z}_{mn}, \quad \left( \frac{\partial^2 z(s_k, t_l)}{\partial t^2} \right) = -\Omega_n^2 \tilde{z}_{mn},$$

$$\left( \frac{\partial^2 z(s_k, t_l)}{\partial t^2} \right) = -\omega_m \Omega_n \tilde{z}_{mn};$$

$$k, m = 0, 1, \dots, n_1-1; \quad l, n = 0, 1, \dots, n_2-1;$$

а функционал  $\hat{M}^\alpha [z]$  представляется в виде

$$\begin{aligned} \hat{M}^\alpha [z] = & \frac{\Delta x \Delta y}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} \{ |\tilde{K}_{mn} \tilde{z}_{mn} \Delta x \Delta y - \tilde{u}_{mn}|^2 + \\ & + \alpha [1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2] |\tilde{z}_{mn}|^2 \}. \end{aligned} \quad (37)$$

Минимум функционала (37) достигается на векторе с коэффициентами Фурье

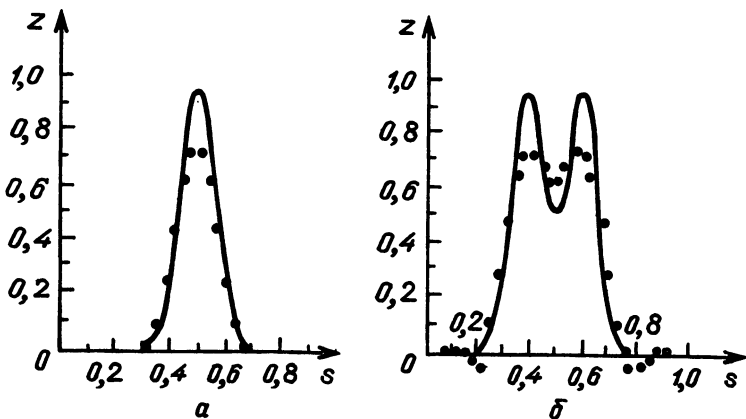
$$\tilde{z}_{mn}^\alpha = \frac{\tilde{K}_{mn}^* \tilde{u}_{mn} \Delta x \Delta y}{|\tilde{K}_{mn}|^2 (\Delta x \Delta y)^2 + \alpha [1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2]};$$

$$m = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \quad n = 0, 1, \dots, n_2 - 1.$$

Решение  $z_\eta^\alpha(s, t)$  на сетке  $(s_k, t_l)$  получается обратным дискретным преобразованием Фурье

$$z_\eta^\alpha(s_k, t_l) = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} \tilde{z}_{mn}^\alpha e^{i\omega_m s_k + i\Omega_n t_l}. \quad (38)$$

Как и для одномерных уравнений, выражения для функций  $\beta_\eta(\alpha)$ ,  $\gamma_\eta(\alpha)$ ,



Р и с. 1.5. Модельная задача для двумерного уравнения типа свертки: а) сечение  $s = 0,28125$ ; б) сечение  $t = 0,46875$

$\rho_\eta(\alpha)$  и их производных по  $\alpha$  могут быть получены без вычисления экстремали  $z_\eta^\alpha$ . Приведем некоторые из них:

$$\beta_\eta(\alpha) = \frac{\Delta x \Delta y}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} \frac{\alpha^2 |\tilde{u}_{mn}|^2 (1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2)}{\{|\tilde{K}_{mn}|^2 (\Delta x \Delta y)^2 + \alpha [1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2]\}^2};$$

$$\gamma_\eta(\alpha) = \|z_\eta^\alpha\|_{W_2^1}^2 =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} \frac{|\tilde{K}_{mn}|^2 |\tilde{u}_{mn}|^2 (\Delta x \Delta y)^2 [1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2]}{\{|\tilde{K}_{mn}|^2 (\Delta x \Delta y)^2 + \alpha [1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2]\}^2};$$

производная по  $\alpha$  для  $\rho_\eta(\alpha) = \beta_\eta(\alpha) - (\delta + h\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)})^2$  есть

$$\rho'_\eta(\alpha) =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} \frac{2 |\tilde{K}_{mn}|^2 |\tilde{u}_{mn}|^2 (\Delta x \Delta y)^2 [1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2]}{\{|\tilde{K}_{mn}|^2 (\Delta x \Delta y)^2 + \alpha [1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2]\}^3} \times$$

$$\times \left\{ \alpha + (\delta + h\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)}) \frac{h}{\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)}} [1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2] \right\}.$$

В приложениях к книге приведена стандартная программа решения двумерного интегрального уравнения от разности аргументов, основанная на технике быстрого преобразования Фурье с выбором параметра  $\alpha$  по обобщенному принципу невязки.

Приведен пример тестового расчета. Пусть дано уравнение

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x-s, y-t) z(s, t) dt ds = u(x, y)$$

с ядром  $K(v, w) = \exp \{-20[(v - 0,5)^2 + (w - 0,5)^2]\}$ ,

$$0 \leq v, w \leq 1; K(v, w) \equiv 0, (v, w) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Точное решение выберем в виде

$$\bar{z}(s, t) = ((\exp \{-(s - 0,3)^2/0,03\} + \exp \{-(s - 0,7)^2/0,03\}) / 0,955040800 - 0,052130913) \times \exp \{-(t - 0,5)^2/0,03\}.$$

Зададим размерность сеток  $n_1 = n_2 = 32$ , уровни погрешностей  $\delta^2 = 6,3 \times 10^{-7}$ ,  $h^2 = 3,7 \times 10^{-11}$ . Результаты приведены на рис. 1.5.

## § 8. Нелинейные некорректно поставленные задачи

При решении нелинейных некорректно поставленных задач возникает ряд трудностей не только вычислительного характера. Основные утверждения и теоремы § 1 существенно используют свойство линейности оператора  $A$ . Для нелинейных операторов аналогичные результаты получаются с использованием схемы компактного вложения.

Подробное рассмотрение методов решения нелинейных некорректных задач не входит в рамки данной книги, и мы ограничимся описанием двух подходов к решению нелинейных некорректных задач.

Как и прежде, будем рассматривать уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U.$$

Пространства  $Z$  и  $U$  будем считать нормированными, а оператор  $A: Z \rightarrow U$  — взаимно однозначным и непрерывным. Возмущенные операторы  $A_h$  также будем считать непрерывными. Кроме того, считаем, что  $\|Az - A_h z\| \leq \psi(h, \|z\|)$ , где  $\psi(h, y)$  — непрерывная по совокупности аргументов функция при  $h \geq 0, y \geq 0$ , монотонно неубывающая по первому аргументу, неотрицательная и такая, что  $\psi(h, y) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $y$  на любом отрезке  $[0, C]$ .

Пусть  $V$  — взаимно однозначный оператор, действующий из гильбертова пространства  $X$  в  $Z$ . Пусть  $V$  усиленно непрерывен, т.е. переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. Например, если  $X$  компактно вложено в  $Z$ , то  $V$  может быть оператором вложения. Пусть  $D$  — замкнутое выпуклое множество ограничений задачи,  $D \subseteq X$ .

Будем предполагать, что  $\bar{z} \in VD \subseteq Z$ . Как и ранее, считаем  $\bar{u} = A\bar{z}$ ,  $\|\bar{u} - u_\delta\| \leq \delta$ . Таким образом приходим к задаче

$$AVx = u, \quad AV: X \rightarrow U, \quad x \in D; \quad (39)$$

причем вместо  $\bar{u}$  и  $A$  заданы их приближения. Оператор новой задачи  $AV$  вполне непрерывен и взаимно однозначен [29].

Рассмотрим экстремальную задачу:  
найти

$$\inf_{x \in X_\eta} \|x\|, \quad (40)$$

$$X_\eta = \{x: x \in D, \|A_h Vx - u_\delta\| \leq \delta + \psi(h, \|Vx\|)\}.$$

Очевидно, что множество  $X_\eta$  непусто, так как содержит по крайней мере такую точку  $\bar{x}$ , что  $\bar{z} = V\bar{x}$ . Следовательно, эта задача эквивалентна задаче: найти

$$\inf_{x \in X_\eta \cap \bar{S}(0, R)} \|x\|, \quad (41)$$

где  $\bar{S}(0, R)$  — замкнутый шар в пространстве  $X$  с центром в нуле и радиусом  $R = \|\bar{x}\|$ . Для того чтобы доказать разрешимость задачи (41) достаточно показать, что  $X_\eta \cap \bar{S}(0, R)$  — слабый компакт в  $X$ , а далее воспользоваться тем, что выпуклый непрерывный функционал  $f(x) = \|x\|$  в гильбертовом пространстве  $X$  слабо полунепрерывен снизу, и применить теорему Вейерштрасса [33].

**Л е м м а 9.** *Множество  $X_\eta \cap \bar{S}(0, R)$  есть слабый компакт в  $X$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Множество  $D \cap \bar{S}(0, R)$  непусто и ограничено, а пространство  $X$  гильбертово, поэтому множества  $D \cap \bar{S}(0, R)$  и, следовательно,  $X_\eta \cap \bar{S}(0, R)$  относительно слабо компактны. Докажем, что множество  $X_\eta \cap \bar{S}(0, R)$ , слабо замкнуто. Пусть последовательность  $\{x_n\}$ ,  $x_n \in X_\eta \cap \bar{S}(0, R)$  слабо сходится к  $x^* \in X$ . Так как  $X_\eta \cap \bar{S}(0, R) \subseteq D \cap \bar{S}(0, R)$ , а  $D \cap \bar{S}(0, R)$  выпукло и замкнуто, то  $x^* \in D \cap \bar{S}(0, R)$ . Из соотношения

$$\begin{aligned} \|A_h Vx^* - u_\delta\| &= \|A_h Vx^* - A_h Vx_n + A_h Vx_n - u_\delta\| \leq \\ &\leq \delta + \psi(h, \|Vx_n\|) + \|A_h Vx^* - A_h Vx_n\|, \end{aligned}$$

используя усиленную непрерывность операторов  $V$  и  $AV$  и непрерывность  $\psi(h, y)$  по второму аргументу, после перехода к пределу получим

$$\|A_h Vx^* - u_\delta\| \leq \delta + \psi(h, \|Vx^*\|),$$

т.е.  $x^* \in X_\eta \cap \bar{S}(0, R)$ .

**З а м е ч а н и е.** Если  $0 \in D$ , но  $0 \notin X_\eta$ , т.е.  $\|A_h V0 - u_\delta\| > \delta + \psi(h, \|V0\|)$ , то задача (40) эквивалентна задаче:

найти

$$\inf \|x\|,$$

$$x \in \{x: x \in D, \|A_h Vx - u_\delta\| = \delta + \psi(h, \|Vx\|)\}.$$

Действительно, предположим, что эти задачи не эквивалентны. Тогда найдется решение  $x_\eta \in D$  задачи (40), удовлетворяющее неравенству  $\|A_h Vx_\eta - u_\delta\| < \delta + \psi(h, \|Vx_\eta\|)$ . Функция  $\Phi(\lambda) = \|A_h V\lambda x_\eta - u_\delta\| - \delta - \psi(h, \|V\lambda x_\eta\|)$  непрерывна и  $\Phi(0) > 0$ , а  $\Phi(1) < 0$ . Поэтому найдется такое  $\lambda^* \in (0, 1)$ , что  $\Phi(\lambda^*) = 0$ , но  $\|\lambda^* x_\eta\| = \lambda^* \|x_\eta\| < \|x_\eta\|$ , что противоречит тому, что  $x_\eta$  — решение (40).

Итак, для любых  $h \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $u_\delta \in U$  таких, что  $\|AV\bar{x} - u_\delta\| \leq \delta$ , задача (40) разрешима. Обозначим множество решений этой задачи через  $X_\eta^*$ . Зададим последовательность  $\eta_n \rightarrow 0$ .

**Т е о р е м а 6.** *Последовательность  $x_n$ , состоящая из произвольных элементов множества  $X_{\eta_n}^*$ , сходится к  $\bar{x} \in D$  по норме пространства  $X$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для любого  $\eta_n$  справедливо неравенство  $\|x_n\| \leq \|\bar{x}\|$ , а пространство  $X$  гильбертово, поэтому из последовательности  $x_n$  можно выделить последовательность  $x_{n_k}$ , слабо сходящуюся

к  $x^* \in D \cap \bar{S}(0, R)$ . При этом

$$\|AVx_{n_k} - \bar{u}\| \leq \|A_{h_{n_k}}Vx_{n_k} - u_{\delta_{n_k}}\| + \|AVx_{n_k} - A_{h_{n_k}}Vx_{n_k}\| + \\ + \|u_{\delta_{n_k}} - \bar{u}\| \leq 2(\delta_{n_k} + \psi(h_{n_k}, \|Vx_{n_k}\|)).$$

Последовательность  $x_{n_k}$  слабо сходится, поэтому последовательность  $\|Vx_{n_k}\|$  ограничена:  $0 \leq \|Vx_{n_k}\| \leq C$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и пользуясь свойствами функции  $\psi(h, y)$  и усиленной непрерывностью оператора  $AV$ , получим

$$\|AVx^* - \bar{u}\| = 0.$$

В силу взаимной однозначности оператора  $AV$  справедливо равенство  $x^* = \bar{x}$ . Далее, так как  $\|x\|$  слабо полунепрерывна снизу, то

$$\|x^*\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| \leq \|\bar{x}\|,$$

т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| = \|\bar{x}\|.$$

Поскольку  $X$  — гильбертово пространство, то  $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$  по норме пространства  $X$ . Это верно для любой последовательности  $\{x_{n_k}\}$ , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

**З а м е ч а н и я.** 1. Поскольку  $AV$  усиленно непрерывен, то  $z_n = Vx_n$  сходится к  $\bar{z}$  — решению уравнения (1) — по норме пространства  $Z$ .

2. Пусть оператор  $AV$  не является взаимно однозначным и  $\bar{X}$  — множество решений уравнения  $AVx = \bar{u}$ ,  $\bar{X} \subseteq D$ . Применяя лемму 9 для случая  $h = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $X_\eta = \bar{X}$ , получим, что это уравнение имеет нормальное решение  $\bar{x}$ . Из доказательства теоремы 6 следует, что алгоритм отыскания приближенного решения как решения экстремальной задачи (40) обеспечивает сходимость последовательности регуляризированных приближений к нормальному решению.

Обобщенный метод невязки к форме решения задачи (40) впервые был предложен в работе [58] для случая  $D = X = W^{\frac{1}{2}}[a, b]$ ,  $Z = L_2[a, b]$ ,  $U = L_2[a, b]$ ,  $V$  — оператор вложения,  $\psi(h, y) = hy$ . В работе [204] исследована данная задача при условии, что  $X$  — рефлексивное пространство.

Отметим, что в описанной постановке, если отказаться от требования  $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$ ,  $\bar{u} \in AVD$ , задача (40) не является, вообще говоря, разрешимой, поскольку множество  $X_\eta$  может быть пустым.

Для построения приближенных решений некорректно поставленной задачи в случае нелинейного оператора так же, как и в § 1, может быть применен функционал  $M^\alpha$ . Впервые метод регуляризации для решения нелинейных задач с использованием сглаживающего функционала был применен в работах [167, 168, 182]. Рассмотрим вопрос о выборе параметра регуляризации в нелинейных задачах при условии, что оператор  $A$  известен точно. При этом будем рассматривать регуляризатор конкретного вида. О других способах задания регуляризаторов в сглаживающем функционале при решении нелинейных некорректных задач см. [178].

Нетривиальность поставленного вопроса демонстрирует приведенный ниже пример, свидетельствующий о том, что в нелинейных задачах даже при отсутствии ограничений обычное поведение (непрерывность, строгая монотонность) таких функций, как невязка, не имеет места [62, 64].

В качестве пространства  $Z$  и  $U$  выберем  $Z = U = \mathbf{R}$  пространство действительных чисел с естественной нормой  $\|z\|_{\mathbf{R}} = |z|$ . Пусть  $\alpha_0$  — положительный числовой параметр, а  $\bar{z}, \bar{u}$  — фиксированные элементы из  $\mathbf{R}$ , связанные соотношением  $\bar{z} = \bar{u}/\sqrt{\alpha_0}$ ,  $\bar{u} > 0$ . Рассмотрим нелинейный оператор  $A: Z \rightarrow U$ , который задается следующим образом:

$$Az = \begin{cases} 2\bar{u}, & z \leq 0, \\ (u^2 - \alpha_0 z^2)^{1/2}, & 0 < z \leq \bar{z}, \\ (\alpha_0 z^2 - \bar{u}^2)^{1/2}, & z > \bar{z}. \end{cases}$$

Легко видеть, что  $u = \bar{u}$  соответствует единственное решение  $\bar{z} \in \mathbf{R}$ . Пусть  $\delta$  — любое число, удовлетворяющее условию  $0 < \delta \leq \delta_0 < \|\bar{u}\|_{\mathbf{R}}$ . Будем считать, что каждому значению погрешности  $\delta$  соответствует элемент  $u_\delta = \bar{u} \in U$ . Рассмотрим функционал

$$M^\alpha [z] = \|Az - u_\delta\|_{\mathbf{R}}^2 + \alpha \|z\|_{\mathbf{R}}^2.$$

Нетрудно видеть, что в нашем случае экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$  определяется соотношениями

$$z_\delta^\alpha = \begin{cases} \bar{z}, & 0 < \alpha < \alpha_0, \\ z^*, & \alpha = \alpha_0, \\ 0, & \alpha_0 < \alpha. \end{cases}$$

Здесь  $z^*$  — любое число из отрезка  $[0, \bar{z}]$ . Вычисляя невязку, получим

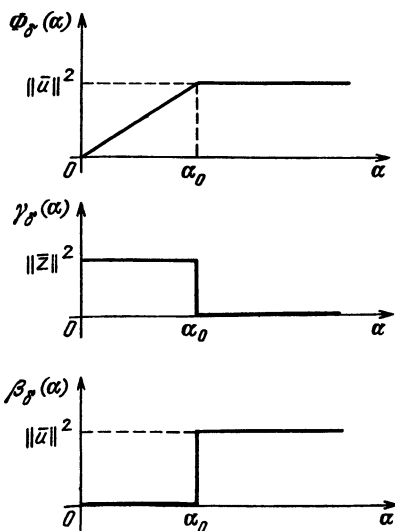
$$\begin{aligned} \beta_\delta(\alpha) &= \|Az_\delta^\alpha - u_\delta\|_{\mathbf{R}}^2 = \\ &= \begin{cases} 0, & 0 < \alpha < \alpha_0, \\ \|\bar{u}\|^2, & \alpha_0 < \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выбор параметра регуляризации по принципу невязки из равенства

$$\beta_\delta(\alpha) = \|Az_\delta^\alpha - u_\delta\|_{\mathbf{R}}^2 = \delta^2$$

невозможен, каково бы ни было  $\delta > 0$  из интервала  $(0, \delta_0)$ . Этот простой пример показывает, что в случае нелинейных задач принцип невязки в форме  $\beta_\delta(\alpha) = \delta^2$  неприменим. На рис. 1.6 изобра-

Р и с. 1.6. Графики функций  $\Phi_\delta(\alpha)$ ,  $\gamma_\delta(\alpha)$ ,  $\beta_\delta(\alpha)$  для нелинейной задачи



жены графики функций  $\Phi_\delta(\alpha) = M^\alpha [z_\delta^\alpha]$ ,  $\gamma_\delta(\alpha) = \|z_\delta^\alpha\|^2$  и  $\beta_\delta(\alpha)$  для данного примера.

Итак, пусть дана задача (39), причем операторы  $A$ ,  $V$  и пространства  $Z$ ,  $X$ ,  $U$  удовлетворяют условиям, перечисленным выше; о множестве  $D \subseteq X$  дополнительно предположим, что  $0 \in D$ . Оператор  $A$  будем считать заданным точно.

Рассмотрим функционал

$$M^\alpha [x] = \|AVx - u_\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2.$$

Меру несовместности уравнения (39) на множестве  $D$  определим как

$$\mu_\delta(u_\delta, A) = \inf_{x \in D} \|AVx - u_\delta\|.$$

Как и в § 1, будем считать, что нам известно приближение  $\mu_\delta^\kappa(u_\delta, A)$  меры несовместности  $\mu_\delta$  с точностью  $\kappa \geq 0$ . Точность  $\kappa$  будем считать согласованной с  $\delta$  таким образом, что  $\kappa(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Л е м м а 10. Для любого  $u_\delta \in U$  и любого  $\alpha > 0$  задача:

найти

$$\inf_{x \in D} M^\alpha [x]$$

разрешима, т.е. множество экстремалей  $X_\delta^\alpha \neq \emptyset$ .

Доказательство этой леммы фактически дано в работе [168]. При рассмотрении задачи с ограничениями необходимо учесть, что множество  $D \cap \bar{S}(0, R)$  для любого  $R > 0$  слабо компактно, так как  $X$  — гильбертово пространство, а  $D$  выпукло и замкнуто, и необходимо воспользоваться непрерывностью оператора  $AV$ , действующего из слабой топологии пространства  $X$  в сильную топологию пространства  $U$ , а также слабой полунепрерывностью снизу функционала  $\|x\|^2$ .

Пусть  $Q$  — оператор выбора, сопоставляющий множеству экстремалей  $X_\delta^\alpha$  фиксированный элемент  $x_\delta^\alpha \in X_\delta^\alpha$ :  $QX_\delta^\alpha = x_\delta^\alpha \in X_\delta^\alpha$ . Как и в § 4, рассмотрим вспомогательные функции

$$\Phi_\delta(\alpha) = \|AVx_\delta^\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha \|x_\delta^\alpha\|^2,$$

$$\gamma_\delta(\alpha) = \|x_\delta^\alpha\|^2, \quad \beta_\delta(\alpha) = \|AVx_\delta^\alpha - u_\delta\|^2.$$

Л е м м а 11. Функции  $\Phi_\delta$ ,  $\gamma_\delta$ ,  $\beta_\delta$  обладают следующими свойствами.

1. Функция  $\Phi_\delta(\alpha)$  непрерывна и вогнута при  $\alpha > 0$ .
2. Функция  $\gamma_\delta(\alpha)$  монотонно не возрастает, а функции  $\Phi_\delta(\alpha)$ ,  $\beta_\delta(\alpha)$  монотонно не убывают при  $\alpha > 0$ , причем на интервале  $(0, \alpha_0)$  таком, что  $x_\delta^\alpha \neq 0$  для любого  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ , функция  $\Phi_\delta(\alpha)$  строго монотонна.
3. Справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \gamma_\delta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \gamma_\delta(\alpha) = 0;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Phi_\delta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \beta_\delta(\alpha) = \|AV0 - u_\delta\|^2 \equiv \nu_\delta^2;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \alpha \gamma_\delta(\alpha) = 0;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_\delta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_\delta(\alpha) = (\mu_\delta(u_\delta, A))^2.$$



Доказательство аналогично доказательству соответствующих пунктов в лемме 3 § 4. Заметим, что если  $\bar{x} \in D$ ,  $\|AV\bar{x} - u_\delta\| \leq \delta$ , то  $\mu_\delta(u_\delta, A) \leq \delta$ .

Будем считать, что  $\delta \in (0, \delta_0]$  ( $\delta_0$  фиксировано) и выполнено естественное условие  $\nu_\delta \equiv \|AV0 - u_\delta\| > \delta_0 + \mu_\delta^k(u_\delta, A)$ . Пусть число  $C$ , не зависящее от  $\delta$ , удовлетворяет соотношениям

$$1 < C < \frac{\|AV0 - u_\delta\|}{\delta_0 + \mu_\delta^k(u_\delta, A)} = \frac{\nu_\delta}{\delta_0 + \mu_\delta^k(u_\delta, A)}. \quad (42)$$

Для данных  $C$  и  $u_\delta$  введем в рассмотрение множества [64]

$$A_\delta^1 = \{\alpha: \alpha > 0, \beta_\delta(\alpha) \geq (\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2\};$$

$$A_\delta^2 = \{\alpha: \alpha > 0, \beta_\delta(\alpha) \leq C^2(\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2\};$$

$$B_\delta^1 = \{\alpha: \alpha > 0, \beta_\delta(\alpha) \leq (\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2\};$$

$$B_\delta^2 = \{\alpha: \alpha > 0, \Phi_\delta(\alpha) \geq C^2(\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2\}.$$

*Лемма 12.* Множества  $A_\delta^1, A_\delta^2, B_\delta^1, B_\delta^2$  непусты.

*Доказательство.* Справедливы следующие утверждения:

$$A_\delta^1 \neq \emptyset, \text{ так как } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \beta_\delta(\alpha) = \nu_\delta^2 > C^2(\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2;$$

$$A_\delta^2 \neq \emptyset, \text{ так как } \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_\delta(\alpha) = (\mu_\delta/u_\delta, A)^2 < C^2(\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2;$$

$$B_\delta^1 \neq \emptyset, \text{ так как } \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_\delta(\alpha) = (\mu_\delta(u_\delta, A))^2 < (\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2;$$

$$B_\delta^2 \neq \emptyset, \text{ так как } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Phi_\delta(\alpha) = \nu_\delta^2 > C^2(\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2.$$

Все эти предельные соотношения доказаны в лемме 11.

*Лемма 13.* Множество  $E_\delta = (A_\delta^1 \cap A_\delta^2) \cup (B_\delta^1 \cap B_\delta^2)$  непусто.

*Доказательство.* Пусть  $A_\delta^1 \cap A_\delta^2 = \emptyset$ . Тогда выбор  $\alpha$  по принципу невязки из неравенства  $(\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2 \leq \beta_\delta(\alpha) \leq C^2(\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2$  невозможен. Покажем, что в этом случае  $B_\delta^1 \cap B_\delta^2 \neq \emptyset$ . Для этого заметим, что поскольку  $\beta_\delta(\alpha)$  монотонно не убывает при  $\alpha > 0$ , то найдется такое

$$\alpha^* = \sup \{\alpha: \alpha > 0, \beta_\delta(\alpha) \leq (\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2\} = \sup B_\delta^1,$$

что  $\alpha^* > 0$ . Причем по предположению

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^* - 0} \beta_\delta(\alpha) \leq (\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^* + 0} \beta_\delta(\alpha) \geq C^2(\delta + \mu_\delta^k(u_\delta, A))^2.$$

Но тогда в силу непрерывности  $\Phi_\delta(\alpha)$  и в силу предельных соотношений

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^* + 0} \Phi_\delta(\alpha) \geq C^2(\delta + \mu_\delta^\kappa(u_\delta, A))^2 + \alpha^* \|x_\delta^{\alpha^*}\|^2 > C^2(\delta + \mu_\delta^\kappa(u_\delta, A))^2$$

(последнее неравенство верно, если  $x_\delta^{\alpha^*} \neq 0$ ),

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_\delta(\alpha) = (\mu_\delta(u_\delta, A))^2 < C^2(\delta + \mu_\delta^\kappa(u_\delta, A))^2,$$

можно утверждать, что  $B_\delta^1 \cap B_\delta^2 \neq \emptyset$ .

Если же  $x_\delta^{\alpha^*} = 0$ , то  $X_\delta^{\alpha^*} = \{0\}$  и  $\Phi_\delta(\alpha) = \beta_\delta(\alpha) = \nu_\delta^2$  для всех  $\alpha > \alpha^*$ , а поэтому

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^* + 0} \Phi_\delta(\alpha) = \Phi_\delta(\alpha^*) = \nu_\delta^2 > C^2(\delta + \mu_\delta^\kappa(u_\delta, A))^2.$$

Сформулируем теперь *альтернативный принцип выбора параметра регуляризации*: пусть  $\bar{u} = AV\bar{x}$ ,  $\bar{x} \in D$ ,  $\|\bar{u} - u_\delta\| \leq \delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  и пусть выполнено (42). Тогда в качестве приближенного решения (39) будем выбирать  $x_\delta = x_\delta^{\tilde{\alpha}} \in X_\delta^{\tilde{\alpha}}$ , где  $\tilde{\alpha} \in E_\delta$ .

**Теорема 7.** Пусть  $\delta_n, \kappa_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $x_{\delta_n} \xrightarrow{сп} \bar{x}$ , а  $Vx_{\delta_n} \rightarrow \bar{z} = V\bar{x}$  сильно в норме пространства  $Z$ .

**Доказательство.** Если  $\tilde{\alpha}_n \in A_{\delta_n}^1 \cap A_{\delta_n}^2$ , то в силу экстремальных свойств  $x_{\delta_n}$  справедливо

$$\begin{aligned} & (\delta_n + \mu_{\delta_n}^{\kappa_n}(u_{\delta_n}, A))^2 + \tilde{\alpha}_n \|x_{\delta_n}\|^2 \leq \\ & \leq \|AVx_{\delta_n} - u_{\delta_n}\|^2 + \tilde{\alpha}_n \|x_{\delta_n}\|^2 \leq \\ & \leq \|AV\bar{x} - u_{\delta_n}\|^2 + \tilde{\alpha}_n \|\bar{x}\|^2 \leq \delta_n^2 + \tilde{\alpha}_n \|\bar{x}\|^2 \leq \\ & \leq (\delta_n + \mu_{\delta_n}^{\kappa_n}(u_{\delta_n}, A))^2 + \tilde{\alpha}_n \|\bar{x}\|^2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|x_{\delta_n}\| \leq \|\bar{x}\|.$$

Если  $\tilde{\alpha}_n \in B_{\delta_n}^1 \cap B_{\delta_n}^2$ , то

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta_n}(\tilde{\alpha}_n) & \geq C^2(\delta_n + \mu_{\delta_n}^{\kappa_n}(u_{\delta_n}, A))^2, \\ \Phi_{\delta_n}(\tilde{\alpha}_n) & \leq \|AV\bar{x} - u_{\delta_n}\|^2 + \tilde{\alpha}_n \|\bar{x}\|^2 \leq \\ & \leq (\delta_n + \mu_{\delta_n}^{\kappa_n}(u_{\delta_n}, A))^2 + \tilde{\alpha}_n \|\bar{x}\|^2. \end{aligned}$$

Из этих неравенств получаем

$$\frac{C^2 - 1}{C^2} \tilde{\alpha}_n \|x_{\delta_n}\|^2 \leq \frac{C^2 - 1}{C^2} \Phi_{\delta_n}(\tilde{\alpha}_n) \leq \tilde{\alpha}_n \|\bar{x}\|^2,$$

откуда

$$\|x_{\delta_n}\|^2 \leq \frac{C^2}{C^2 - 1} \|\bar{x}\|^2.$$

Таким образом, последовательность  $\{x_{\delta_n}\}$  относительно слабо компактна. Далее, поскольку в обоих случаях

$$\beta_{\delta_n}(\tilde{\alpha}_n) = \|AVx_{\delta_n} - u_{\delta_n}\|^2 \leq C^2(\delta_n + \mu_{\delta_n}^{k_n}(u_{\delta_n}, A))^2 \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$  и оператор  $AV$  усиленно непрерывен, то, как в теореме 1,  $x_{\delta_n} \xrightarrow{сл} \bar{x}$ . Следовательно,  $Vx_{\delta_n} \rightarrow V\bar{x} = \bar{z}$  в норме пространства  $Z$ .

**З а м е ч а н и я.** 1. Таким образом,  $z_{\delta_n} = Vx_{\delta_n}$  можно рассматривать как приближенные решения уравнения (1) с нелинейным оператором  $A$ .

2. Альтернативный принцип невязки означает, что если выбор  $\alpha$  по принципу невязки  $\beta_{\delta}(\alpha) = (\delta + \mu_{\delta}^k(u_{\delta}, A))^2$  оказывается невозможным (поскольку в соответствующей точке функция невязки  $\beta_{\delta}(\alpha)$  терпит разрыв), то необходимо выбирать параметр регуляризации левее точки разрыва согласно принципу сглаживающего функционала [120, 128, 138].

3. В формулировке альтернативного принципа невязки можно положить  $\mu_{\delta}^k(u_{\delta}, A) = 0$ , при этом теорема 7 остается справедливой [64]. Однако в этом случае выбор параметра регуляризации согласно альтернативному принципу невязки гарантируется только для тех  $u_{\delta} \in U$ , для которых существует такое  $\bar{x} \in D$ , что  $\|AV\bar{x} - u_{\delta}\| \leq \delta$ .

О выборе параметра регуляризации в нелинейных задачах см. работы [7, 46, 47, 154, 178]. Дальнейшее развитие конструктивные способы выбора параметра регуляризации в нелинейных задачах нашли в работах А.С. Леонова [112, 114–117], причем им был рассмотрен случай, когда оператор задан приближенно.

## § 9. Несовместные некорректные задачи

Вернемся к постановке задачи, рассмотренной в начале § 1, но будем считать, что точное решение уравнения (1)  $Az = u$ , где  $z \in D \subseteq Z$ ,  $u \in U$ ,  $Z$ ,  $U$  – гильбертовы пространства, при  $u = \bar{u}$ , возможно, не существует, однако существует элемент  $\bar{z} \in Z$ , на котором достигается минимум невязки:

$$\bar{\mu} = \inf_{z \in D} \|Az - \bar{u}\| \geq 0$$

( $\bar{\mu}$  – мера несовместности уравнения (1) с точными данными  $\bar{u}$ ,  $A$ ). Если  $\bar{\mu} > 0$ , то такой элемент  $\bar{z} = \operatorname{argmin}_{z \in D} \|Az - \bar{u}\|$  ( $\|A\bar{z} - \bar{u}\| = \bar{\mu}$ ,  $\bar{z} \in D$ ) называется

*псевдорешением*. Если множество псевдорешений  $\bar{Z} = \{z : z \in D, \|Az - \bar{u}\| = \bar{\mu}\}$  состоит не из единственного элемента, то легко видеть, что  $\bar{Z}$  выпукло и замкнуто, а поэтому существует единственный элемент  $\bar{z} \in \bar{Z}$ , наименее удаленный от нуля. Такой элемент называется *нормальным псевдорешением*;

$$\bar{z} = \operatorname{argmin}_{z \in \bar{Z}} \|z\|. \quad (43)$$

Если псевдорешение  $\bar{z}$  единственно, то будем считать, что  $\bar{z}$  является также нормальным псевдорешением, а если  $\bar{\mu} = 0$  (уравнение (1) совместно), то псевдорешение является решением (1), а нормальное псевдорешение является нормальным решением.

Будем рассматривать, как самую общую, задачу построения приближений к нормальному псевдорешению несовместного уравнения (1) по приближенным данным  $\{A_h, u_\delta, \eta\}$ ;  $\eta = (\delta, h)$ ,  $\delta > 0$ ,  $h \geq 0$ ,  $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$ ,  $\|A_h - A\| \leq h$ , рассматривая как частный случай  $\bar{\mu} = 0$ .

Легко показать, что построенный выше (§ 2) алгоритм не является регуляризирующим в случае, если  $\bar{\mu} > 0$ . Рассмотрим пример [100]:  $D = Z = U = R^2$ ,  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Уравнение (1) – система линейных алгебраических уравнений. Точная система имеет вид

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ x &= 1, \end{aligned} \quad \text{т.е.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приближенная система имеет вид

$$\begin{aligned} x + \sigma y &= \delta, \\ x + 2\sigma y &= 1, \end{aligned} \quad \text{т.е.} \quad A_h = \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 1 & 2\sigma \end{bmatrix}. \quad \text{где } |\sigma| \leq \frac{h}{\sqrt{5}},$$

$$\|A - A_h\| \leq h, \quad u_\delta = \begin{pmatrix} \delta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|u_\delta - \bar{u}\| = \delta, \quad \delta > 0.$$

Мера несовместности точной системы  $\bar{\mu} = 1/\sqrt{2}$ , нормальное псевдорешение  $\bar{z} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Мера несовместности возмущенной системы  $\mu_\eta = \inf_z \|A_h z - u_\delta\| = 0 \quad \forall \sigma \neq 0, \delta \geq 0$ , так как  $A_h$  соответствует невырожденная матрица. Рассмотрим обобщенный метод невязки, состоящий в решении задачи (§ 3):

найти

$$\inf \|z\|, \quad z \in Z_\eta = \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h \|z\|)^2 + \mu_\eta^2(u_\delta, A_h)\}$$

или в данном случае  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,

$$Z_\eta = \{z: (x + \sigma y - \delta)^2 + (x + 2\sigma y - 1)^2 \leq [\delta + h(x^2 + y^2)^{1/2}]^2\}.$$

Для достаточно малых  $h, \delta$   $\bar{z} \notin Z_\eta$ , так как, предположив противное, приходим к неверному неравенству  $1/2 \leq \delta(1 - \delta) + (\delta + h/2)^2$ , правая часть которого сколь угодно мала. Легко видеть, что нельзя также указать элементы  $\tilde{z}_\eta \in Z_\eta$  такие, что  $\tilde{z}_\eta \rightarrow \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Таким образом, решение, полученное по обобщенному методу невязки (а также по эквивалентному ему обобщенному принципу невязки), не сходится к  $\bar{z}$  при  $\delta, h \rightarrow 0$ .

Однако алгоритм, построенный в § 2, легко обобщается на случай несовместных операторных уравнений, если вместо меры несовместности

приближенного уравнения  $\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} \|A_h z - u_\delta\|$  использовать следующую оценку сверху для меры несовместности [35, 111]:

$$\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} (\delta + h \|z\| + \|A_h z - u_\delta\|). \quad (44)$$

**Л е м м а 14 [35].** При сформулированных выше условиях  $\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) \geq \bar{\mu}$ , причем  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \bar{\mu}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку для любых  $z \in D$

$$\bar{\mu} = \inf_{z \in D} \|A_h z - u_\delta\| \leq \|(A - A_h)z\| + \|\bar{u} - u_\delta\| + \|A_h z - u_\delta\| \leq h \|z\| + \delta + \|A_h z - u_\delta\|,$$

то

$$\bar{\mu} \leq \inf_{z \in D} (\delta + h \|z\| + \|A_h z - u_\delta\|) = \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h).$$

Далее, пусть  $\bar{z} \in D$  таково, что  $\|A\bar{z} - \bar{u}\| = \bar{\mu}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &\leq \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} (\delta + h \|z\| + \|A_h z - u_\delta\|) \leq \\ &\leq \delta + h \|\bar{z}\| + \|A_h \bar{z} - u_\delta\| \leq \delta + h \|\bar{z}\| + \|(A - A_h)\bar{z}\| + \\ &+ \|u_\delta - \bar{u}\| + \|A\bar{z} - \bar{u}\| \leq 2(\delta + h \|\bar{z}\|) + \bar{\mu}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\bar{\mu} \leq \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) \leq \bar{\mu} + 2(\delta + h \|\bar{z}\|);$$

отсюда следует второе утверждение леммы.

Обозначим, как и ранее, экстремаль функционала (2)  $M^\alpha[z]$  через  $z_\eta^\alpha$  и введем в рассмотрение обобщенную невязку [101]

$$\hat{\rho}_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\| + \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h))^2, \quad (45)$$

несколько отличающуюся от обобщенной невязки, введенной в § 2, в частности,  $\mu_\eta$  заменена на  $\hat{\mu}_\eta$ . Если  $\hat{\mu}_\eta$  вычисляется с погрешностью  $\kappa \geq 0$ , то можно аналогично § 2 ввести обобщенную невязку

$$\hat{\rho}_\eta^\kappa(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\| + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2,$$

где

$$\hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \leq \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) \leq \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) + \kappa.$$

Заметим, что в соответствии с леммой 14  $\hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \geq \bar{\mu}$ , так как  $\kappa \geq 0$ , и  $\hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \rightarrow \bar{\mu}$  при  $\eta \rightarrow 0$ , если  $\kappa$  согласовано с  $\eta$  так, что  $\kappa = \kappa(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Аналогично следствию из леммы 3 можно получить следующие свойства обобщенной невязки  $\hat{\rho}_\eta^\kappa(\alpha)$ :

1)  $\hat{\rho}_\eta^\kappa(\alpha)$  непрерывна и монотонно не убывает при  $\alpha > 0$ ;

2)  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \hat{\rho}_\eta^\kappa(\alpha) = \|u_\delta\|^2 - (\delta + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$ ;

3)  $\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} \hat{\rho}_\eta^\kappa(\alpha) \leq (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 - (\delta + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2 < 0$ , так как

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) < \mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h);$$

4) пусть выполнено условие

$$\|u_\delta\| > \delta + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h); \quad (46)$$

тогда найдется такое  $\alpha^* > 0$ , что

$$\hat{\rho}_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0. \quad (47)$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\|A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta\| = \delta + h \|z_\eta^{\alpha^*}\| + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h), \quad (48)$$

причем элемент  $z_\eta^{\alpha^*}$  не равен нулю и определяется единственным образом. Сформулируем следующую модификацию обобщенного принципа невязки: по заданным  $\{A_h, u_\delta, \eta\}$  вычисляется

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) &= \inf_{z \in D} (\delta + h \|z\| + \|A_h z - u_\delta\|) + \kappa = \\ &= \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) + \kappa; \quad \kappa \geq 0, \quad \kappa = \kappa(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(подробнее о вычислении  $\hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$  см. ниже).

Если условие (46) не выполнено, то в качестве приближения к нормальному псевдорешению уравнения (1) полагаем  $z_\eta = 0$ . Если (46) выполнено, то находим  $\alpha^*$ , удовлетворяющее уравнению (47). В качестве приближения к нормальному псевдорешению уравнения (1) полагаем  $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$ .

**Т е о р е м а 8.**  $\lim_{\eta \rightarrow 0} z_\eta = \bar{z}$ , где  $\bar{z}$  – нормальное псевдорешение уравнения (1), т.е. построенный алгоритм является регуляризирующим алгоритмом отыскания нормального псевдорешения уравнения (1).

**Доказательство.** Если  $\bar{z} = 0$ , то

$$\|u_\delta\| = \|A\bar{z} - \bar{u} + \bar{u} - u_\delta\| \leq \bar{\mu} + \delta \leq \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) + \delta,$$

т.е. условие (46) не выполнено, и в соответствии с обобщенным принципом невязки  $z_\eta = 0$ , следовательно,  $z_\eta \rightarrow \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Пусть теперь  $\bar{z} \neq 0$ . Тогда

$$\|\bar{u}\| > \bar{\mu}$$

(предположение  $\|\bar{u}\| < \bar{\mu}$  противоречит определению меры несовместимости, поскольку  $\|Az' - \bar{u}\| = \|\bar{u}\| < \bar{\mu}$  для  $z' = 0 \in D$ , а предположение  $\|\bar{u}\| = \bar{\mu}$  противоречит тому, что  $\bar{z} \neq 0$ , а также единственности нормального псевдорешения уравнения (1)).

Поскольку  $\delta + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \rightarrow \bar{\mu}$  при  $\eta \rightarrow 0$ , (48) влечет выполнение условия (46), по крайней мере для достаточно малых  $\eta$ . Как и при доказательстве теоремы 2, предположим, что  $z_\eta^{\alpha^*(\eta)} \not\rightarrow \bar{z}$ . Это означает, что существует такое  $\epsilon > 0$  и такая последовательность  $\eta_k \rightarrow 0$ , что  $\|\bar{z} - z_{\eta_k}^{\alpha^*}\| \geq \epsilon$ ,  $\alpha_k^* = \alpha^*(\eta_k)$  – решение уравнения (47).

В силу экстремальных свойств  $z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \in D$  ( $z_{\eta_k} = z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}$ )

$$\|A_{h_k} z_{\eta_k} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}\|^2 \leq \|A_{h_k} \bar{z} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^* \|\bar{z}\|^2,$$

откуда, используя (48) и результаты леммы 14, имеем

$$\begin{aligned} & (\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}\| + \bar{\mu})^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}\|^2 \leq \\ & \leq (\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}\| + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}\|^2 = \\ & = \|A_{h_k} z_{\eta_k} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}\|^2 \leq (\delta_k + h_k \|\bar{z}\| + \bar{\mu})^2 + \alpha_k^* \|\bar{z}\|^2. \end{aligned} \quad (49)$$

(Здесь используется неравенство

$$\begin{aligned} \|A_{h_k} \bar{z} - u_{\delta_k}\| &= \|(A_{h_k} - A) \bar{z} + \bar{u} - u_{\delta_k} + A \bar{z} - \bar{u}\| \leq \\ &\leq \delta + h \|\bar{z}\| + \bar{\mu}. \end{aligned}$$

Из (49) и строгой монотонности функции вещественного переменного  $f(x) = (A + Bx)^2 + Cx^2$  при  $x > 0$ ,  $A = \delta_k + \bar{\mu} \geq 0$ ,  $B = h_k \geq 0$ ,  $C = \alpha_k^* > 0$  следует, что

$$\|z_{\eta_k}\| \leq \|\bar{z}\|. \quad (50)$$

Считая, как и при доказательстве теорем 1, 2, что  $z_{\eta_k} \xrightarrow{сл} z^*$ ,  $z^* \in D$ , получим неравенство

$$\|z^*\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}\| \leq \|z^*\|. \quad (51)$$

Теперь для того, чтобы завершить доказательство и прийти к противоречию с предположением в начале теоремы, остается доказать, что  $z^* = \bar{z}$ .

Так как

$$\begin{aligned} \|A z_{\eta_k} - \bar{u}\| &\leq \delta_k + h_k \|z_{\eta_k}\| + \|A_{h_k} z_{\eta_k} - u_{\delta_k}\| \leq \\ &\leq 2(\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}\|) + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_{\delta_k}, A_{h_k}) \leq 2(\delta_k + h_k \|\bar{z}\|) + \\ &+ \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_{\delta_k}, A_{h_k}) \rightarrow \bar{\mu} \end{aligned}$$

при  $\eta_k \rightarrow 0$ , то вследствие слабой полунепрерывности снизу  $\|Az - \bar{u}\|$  по  $z$  и определения меры несовместности имеем  $\|Az^* - \bar{u}\| = \bar{\mu}$ . В силу (51) и единственности нормального псевдорешения  $z^* = \bar{z}$ . Далее, как и при доказательстве теоремы 1, из (51) следует, что  $\|z_{\eta_k}\| \rightarrow \|\bar{z}\|$ ; учитывая,

что  $z_{\eta_k} \xrightarrow{сл} \bar{z}$  и гильбертово пространство  $Z$  обладает  $H$ -свойством, получаем  $z_{\eta_k} \rightarrow \bar{z}$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и я.** 1. Подчеркнем, что описанная модификация обобщенного принципа невязки является регуляризирующим алгоритмом в независимости от того, совместно исходное уравнение (1) или нет.

2. Аналогично теореме 5 можно доказать, что данная модификация обобщенного принципа невязки эквивалентна обобщенному методу невязки, который в рассматриваемом случае состоит в решении экстремальной задачи с ограничениями:

найти

$$\inf \|z\|,$$

$$z \in \{z \in D, \|A_{h_k} z - u_{\delta_k}\| \leq \delta + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_{\delta_k}, A_{h_k}) + h \|z\|\}.$$

О других подходах к решению линейных некорректных несовместных задач см. [45, 135, 138].

Обобщенный метод невязки может быть применен и для решения нелинейных несовместных некорректных задач, если соответствующим образом построить оценку меры несовместности [102]. Пусть выполнены предположения, сформулированные в начале § 8, а уравнение (39), вообще говоря, является несовместным. Пусть точным данным  $\{A, \bar{u}\}$  соответствует мера несовместности

$$\bar{\mu} = \inf_{x \in D} \|AVx - \bar{u}\|, \quad (52)$$

причем множество псевдорешений

$$\bar{X} = \{\bar{x} : \bar{x} \in D, \|AV\bar{x} - \bar{u}\| = \bar{\mu}\} \neq \emptyset.$$

Аналогично доказательству замечания 2 к теореме легко показать, что в  $\bar{X}$  существует непустое множество нормальных псевдорешений

$$\bar{X}_n = \{\bar{x}_n : \bar{x}_n = \operatorname{argmin}_{x \in \bar{X}} \|x\| = \operatorname{Argmin}_{x \in \bar{X}} \|x\|.$$

Теперь по приближенным данным  $\{A_h, u_\delta, \eta\}$  построим оценку сверху меры несовместности

$$\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{x \in D} \{\delta + \psi(h, \|Vx\|) + \|A_h Vx - u_\delta\|\} \quad (53)$$

(требования к функции  $\psi(h, y)$  сформулированы в начале § 8).

**Л е м м а 15.** При сформулированных в начале §8 условиях относительно пространств  $X, Z, U$ , операторов  $A, A_h$  и функции  $\psi(h, y)$   $\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) \geq \bar{\mu}$ , причем  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \bar{\mu}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Аналогично доказательству леммы 14 заметим, что для любого  $x \in D$

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \inf_{x \in D} \|AVx - \bar{u}\| \leq \|AVx - \bar{u}\| = \\ &= \|AVx - A_h Vx + u_\delta - \bar{u} + A_h Vx - u_\delta\| \leq \\ &\leq \psi(h, \|Vx\|) + \delta + \|A_h Vx - u_\delta\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{\mu} \leq \inf_{x \in D} (\delta + \psi(h, \|Vx\|) + \|A_h Vx - u_\delta\|) = \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h).$$

Далее, пусть  $\bar{x} \in \bar{X} \subseteq D$ , т.е.  $\|AV\bar{x} - \bar{u}\| = \bar{\mu}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &\leq \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{x \in D} (\delta + \psi(h, \|Vx\|) + \|A_h Vx - u_\delta\|) \leq \\ &\leq \delta + \psi(h, \|V\bar{x}\|) + \|A_h V\bar{x} - u_\delta\| \leq \\ &\leq \delta + \psi(h, \|V\bar{x}\|) + \|A_h V\bar{x} - AV\bar{x}\| + \|\bar{u} - u_\delta\| + \\ &+ \|AV\bar{x} - \bar{u}\| \leq 2(\delta + \psi(h, \|V\bar{x}\|)) + \bar{\mu} \rightarrow \bar{\mu} \end{aligned}$$

при  $\eta \rightarrow 0$ , что и доказывает второе утверждение леммы.



Если оценка меры несовместности вычисляется с погрешностью  $\kappa \geq 0$ , то естественно рассматривать  $\hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$ :

$$\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) \leq \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \leq \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) + \kappa,$$

причем мы будем предполагать, что  $\kappa = \kappa(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$ . В этом случае лемма 15 справедлива и для  $\hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$ . Рассмотрим теперь экстремальную задачу:

$$\begin{aligned} & \text{найти} \\ & \inf_{x \in X} \|x\|, \\ & X_\eta = \{x: x \in D, \|A_h Vx - u_\delta\| \leq \delta + \psi(h, \|Vx\|) + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Очевидно, что множество  $X_\eta \neq \emptyset$ , так как содержит по крайней мере  $\bar{X} \subseteq X_\eta$ . На самом деле, для любого элемента  $\bar{x} \in \bar{X} \subseteq D$

$$\begin{aligned} \|A_h V\bar{x} - u_\delta\| &= \|A_h V\bar{x} - AV\bar{x} + \bar{u} - u_\delta + AV\bar{x} - \bar{u}\| \leq \\ &\leq \psi(h, \|V\bar{x}\|) + \delta + \bar{\mu} \leq \delta + \psi(h, \|V\bar{x}\|) + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h). \end{aligned}$$

Возьмем теперь произвольный элемент  $\bar{x}_n$ . Очевидно,  $\bar{x}_n \in \bar{X}_n \subseteq \bar{X}$ , поэтому задача (54) эквивалентна задаче:

$$\begin{aligned} & \text{найти} \\ & \inf \|x\|, \\ & x \in X_\eta \cap \bar{S}(0, \|\bar{x}_n\|), \end{aligned} \quad (55)$$

где  $\bar{S}(0, \|\bar{x}_n\|)$  – замкнутый шар в пространстве  $X$  с центром в нуле и радиусом  $\|\bar{x}_n\|$ .

Дословно повторяя доказательство леммы 9 (учитывая лишь, что в определении множества  $X_\eta$  участвует оценка меры несовместности  $\hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$ ), легко показать, что множество  $X_\eta \cap \bar{S}(0, \|\bar{x}_n\|)$  – слабый компакт в  $X$ , а поэтому задача (55) разрешима. Обозначим множество решений этой задачи  $X_\eta^*$ .

**Т е о р е м а 9.** *Имеет место  $\beta$ -сходимость  $X_\eta^*$  к  $\bar{X}_n$  при  $\eta \rightarrow 0$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**  $\beta$ -сходимость  $X_\eta^*$  к  $\bar{X}_n$  при  $\eta \rightarrow 0$  означает, что  $\beta$  – пологотклонение:

$$\beta(X_\eta^*, \bar{X}_n) = \sup_{x_\eta^* \in X_\eta^*} \inf_{\bar{x}_n \in \bar{X}_n} \|x_\eta^* - \bar{x}_n\| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Доказательство теоремы проведем от противного. Пусть найдутся такие последовательность  $\eta_n \rightarrow 0$ , элементы  $x_{\eta_n} \in X_{\eta_n}^*$  и число  $\epsilon > 0$ , что  $\|x_{\eta_n} - \bar{x}_n\| \geq \epsilon$  для всех  $\bar{x}_n \in \bar{X}_n$ . Обозначим  $x_{\eta_n} \equiv x_n$ . Поскольку из (55)  $\|x_n\| \leq \|\bar{x}_n\|$ , а пространство  $X$  гильбертово, из последовательности  $x_n$  можно выделить подпоследовательность  $x_{n_k}$ , слабо сходящуюся к  $x^* \in D \cap \bar{S}(0, \|\bar{x}_n\|)$ . При этом

$$\begin{aligned} \|AVx_{n_k} - \bar{u}\| &\leq \|A_{h_{n_k}} Vx_{n_k} - u_{\delta_{n_k}}\| + \|AVx_{n_k} - A_{h_{n_k}} Vx_{n_k}\| + \\ &+ \|u_{\delta_{n_k}} - \bar{u}\| \leq 2(\delta_{n_k} + \psi(h_{n_k}, \|Vx_{n_k}\|)) + \mu_{\eta_{n_k}}^{\kappa_{n_k}}(u_{\delta_{n_k}}, A_{h_{n_k}}), \\ \kappa_{n_k} &\equiv \kappa(\eta_{n_k}). \end{aligned}$$

Последовательность  $x_{n_k}$  слабо сходится, поэтому последовательность  $\|Vx_{n_k}\|$  ограничена:  $0 \leq \|Vx_{n_k}\| \leq C$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и пользуясь свойствами функции  $\psi(h, y)$ , усиленной непрерывностью оператора  $AV$  и леммой 15, получим  $\|AVx^* - \bar{u}\| = \bar{\mu}$ . Так как  $x^* \in D$ , то  $x^* \in \bar{X}$ . Далее  $\|x\|$  слабо полунепрерывна снизу, поэтому

$$\|x^*\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| \leq \|\bar{x}_H\|,$$

т.е.  $x^* \in \bar{X}_H$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| = \|x^*\|$ . Поскольку  $X$  – гильбертово пространство, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x^* \in \bar{X}_H$ , что приводит к противоречию. Теорема доказана.

**С л е д с т в и е.** Пусть нормальное псевдорешение  $\bar{x}_H$  единственно. Тогда  $x_\eta \rightarrow \bar{x}_H$  при  $\eta \rightarrow 0$ , где  $x_\eta$  – произвольный элемент множества  $X_\eta^*$ .

О применении обобщенного принципа невязки для решения нелинейных несовместных некорректных задач с приближенно заданным оператором см. работы [116, 117].

В заключении параграфа рассмотрим вопрос о вычислении оценки сверху меры несовместности  $\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h)$  при решении линейных некорректных задач. Введем функционал

$$\Phi_\eta(z) = \delta + h \|z\| + \|A_h z - u_\delta\|. \quad (56)$$

Тогда

$$\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} \Phi_\eta(z). \quad (57)$$

Отметим некоторые элементарные свойства функционала  $\Phi_\eta(z)$ :

- 1)  $\Phi_\eta(z)$  – выпуклый непрерывный функционал;
- 2)  $\Phi_\eta(z)$  – функционал, дифференцируемый по Фреше везде, кроме  $z = 0$  и  $z = A_h^{-1}u_\delta$  (если последний элемент существует);
- 3) если  $h > 0$ , то задача (57) разрешима, т.е. существует (возможно, не единственный) элемент  $\hat{z}_\eta \in D$  такой, что  $\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \Phi_\eta(\hat{z}_\eta)$ .

Докажем последнее свойство. Рассмотрим последовательность  $z_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )  $z_n \in D$ ,  $\Phi_\eta(z_n) \rightarrow \inf_{z \in D} \Phi_\eta(z)$ . Тогда  $\Phi_\eta(z_n) \leq \Phi_\eta(z_1)$ , и задача (57) эквивалентна задаче:

найти

$$\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D \cap \bar{S}(0, R)} \Phi_\eta(z),$$

где  $\bar{S}(0, R)$  – замкнутый шар с центром в нуле и радиусом  $R = 1/h \cdot \Phi_\eta(z_1)$ . Множество  $D \cap \bar{S}(0, R)$  – выпукло, замкнуто и ограничено, следовательно, из последовательности  $z_n \in D \cap \bar{S}(0, R)$  можно выделить подпоследовательность  $z_{n_k}$ , слабо сходящуюся к элементу  $z^* \in D \cap \bar{S}(0, R)$ . Поскольку  $\Phi_\eta(z_{n_k}) \rightarrow \inf_{z \in D} \Phi_\eta(z)$ , а функционал  $\Phi_\eta(z)$  слабо полунепрерывен снизу, то переходя к пределу при  $n_k \rightarrow \infty$ , получим  $\Phi_\eta(z^*) = \inf_{z \in D} \Phi_\eta(z)$ , т.е. в качестве  $\hat{z}_\eta$  можно взять  $z^*$ .

Итак, задача отыскания  $\hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h)$  есть задача выпуклого программирования, для решения которой имеются эффективные численные методы. В случае, если  $D = Z$ , алгоритм эффективной оценки меры несовместности предложен в работах [110, 111]. Опишем этот алгоритм.

**Л е м м а 16** [110]. Пусть  $h > 0$ . Для того чтобы минимум  $\Phi_\eta(z)$  достигался на элементе  $\hat{z}_\eta = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$h \|u_\delta\| \geq \|A_h^* u_\delta\|. \quad (58)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Запишем  $\Phi_\eta(z)$  в виде суммы  $\Phi_\eta(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ , где  $\Phi_1(z) = \|A_h z - u_\delta\|$ ,  $\Phi_2(z) = h \|z\| + \delta$ . Если  $u_\delta = 0$ , то очевидно, что  $\hat{z}_\eta = 0$  — единственная точка минимума  $\Phi_\eta(z)$ , причем (58) выполнено. При  $u_\delta \neq 0$ , учитывая, что  $\Phi_1(z)$ ,  $\Phi_2(z)$  — непрерывные выпуклые на  $Z$  функционалы,  $\Phi_1(z)$  дифференцируема по Фреше в окрестности  $z = 0$  и  $\Phi_1'(0) = -A_h^* \frac{u_\delta}{\|u_\delta\|}$ , то в соответствии с [110]  $\hat{z}_\eta = 0$  является точкой минимума  $\Phi_\eta(z)$  тогда и только тогда, когда

$$(\Phi_1'(0), z - 0) + \Phi_2(z) - \Phi_2(0) \geq 0 \quad \forall z \in Z$$

или

$$\left(-A_h^* \frac{u_\delta}{\|u_\delta\|}, z\right) + h \|z\| + \delta - \delta \geq 0 \quad \forall z \in Z.$$

Отсюда

$$h \|z\| \geq \left(A_h^* \frac{u_\delta}{\|u_\delta\|}, z\right) \quad \forall z \in Z$$

или

$$h \geq \left(A_h^* \frac{u_\delta}{\|u_\delta\|}, \frac{z}{\|z\|}\right) \quad \forall z \in Z. \quad (59)$$

Максимальное значение правой части (59), очевидно, достигается при  $z = A_h^* u_\delta$ , что и доказывает справедливость леммы.

**З а м е ч а н и е.** При численной реализации условие (58) легко проверяется.

**Л е м м а 17** [110]. Если функционал  $\Phi_\eta(z)$  при  $h > 0$  достигает минимального значения хотя бы на двух различных элементах  $z_1, z_2 \in Z$ , то справедливы следующие утверждения:

- 1) уравнение  $A_h z = u_\delta$  разрешимо;
- 2) минимум  $\Phi_\eta(z)$  достигается на отрезке  $[0, \hat{z}]$ , где  $\hat{z}$  — нормальное решение уравнения  $A_h z = u_\delta$ ;

$$3) \min_{z \in Z} \Phi_\eta(z) = \|u_\delta\| + \delta = h \|\hat{z}\| + \delta.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Так как  $\Phi_\eta(z)$  — выпуклый непрерывный функционал, то множество его экстремалей  $Z_{\min}$  выпукло, замкнуто (см., например, [71]) и, как было показано выше, ограничено. По предположению существуют  $z_1, z_2 \in Z_{\min}$ ,  $z_1 \neq z_2$ . Для определенности будем считать, что  $z_2 \neq 0$ . В силу выпуклости  $Z_{\min}$  отрезок, соединяющий  $z_1, z_2$ ,

т.е.  $[z_1, z_2] = \{z: z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2, \lambda \in [0, 1]\}$  также принадлежит  $Z_{\min}$ . Поэтому для любого  $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) &= \min_{z \in Z} \Phi_\eta(z) = \\ &= \delta + h \|\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2\| + \|A_h(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) - u_\delta\| = \\ &= \delta + \lambda h \|z_1\| + (1 - \lambda)h \|z_2\| + \lambda \|A_h z_1 - u_\delta\| + (1 - \lambda) \|A_h z_2 - u_\delta\|. \end{aligned} \quad (60)$$

Из последнего равенства и выпуклости  $\|z\|$  и  $\|A_h z - u_\delta\|$  вытекает, что для любого  $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2\| &= \lambda \|z_1\| + (1 - \lambda) \|z_2\|, \\ \|\lambda(A_h z_1 - u_\delta) + (1 - \lambda)(A_h z_2 - u_\delta)\| &= \\ &= \lambda \|A_h z_1 - u_\delta\| + (1 - \lambda) \|A_h z_2 - u_\delta\|. \end{aligned} \quad (61)$$

Доказательство этих равенств легко получается от противного. Если предположить, что при некотором  $\lambda^* \in (0, 1)$  какое-то из равенств (61) не выполнено, то не будет выполнено и равенство (60).

В силу строгой выпуклости гильбертовых пространств  $Z$  и  $U$  найдутся такие числа  $\kappa \neq 1$  и  $\beta$ , что либо

$$z_1 = \kappa z_2, \quad A_h z_1 - u_\delta = \beta(A_h z_2 - u_\delta), \quad (62)$$

либо

$$z_1 = \kappa z_2, \quad A_h z_1 - u_\delta = 0 \quad (\text{т.е. } \beta = 0).$$

Во втором случае п. 1 леммы выполнен. Рассмотрим первый случай. От противного легко показать, что  $\beta \neq 1$ . На самом деле, пусть  $\beta = 1$ . Так как

$$\Phi_\eta(z_1) = \Phi_\eta(z_2),$$

т.е.

$$\delta + h \|z_1\| + \|A_h z_2 - u_\delta\| = \delta + h \|z_2\| + \|A_h z_2 - u_\delta\|.$$

Отсюда, учитывая  $\beta = 1$ , получаем  $\|z_1\| = |\kappa| \|z_2\|$ , т.е.  $|\kappa| = 1$ . Если  $\kappa = 1$ , то получим противоречие с условием  $z_1 \neq z_2$ . Если  $\kappa = -1$ , то  $z_1 = -z_2$ , и из условий 1(2) следует, что  $A_h z_1 = A_h z_2 = 0$ , т.е.  $z_1, z_2 \in \text{Ker } A_h$ . Но тогда  $z_1, z_2 \in Z_{\min}$  в том и только в том случае, если  $z_1 = z_2 = 0$ , поскольку  $\|A_h z_1 - u_\delta\| = \|A_h z_2 - u_\delta\| = \|u_\delta\|$ , а  $\|z_1\| = \|z_2\| \geq 0$ . По условию же  $z_1 \neq z_2$ . Итак,  $\beta \neq 1$ . Из (62) получаем

$$\hat{z} = (\kappa - \beta) z_2 / (1 - \beta), \quad A_h \hat{z} = u_\delta, \quad \hat{z} \neq 0.$$

Утверждение 1) леммы полностью доказано.

Очевидно, что  $u_\delta \neq 0$  (так как если  $u_\delta = 0$ , то минимум  $\Phi_\eta(z)$  достигается только при  $z_1 = z_2 = 0$ ). Поэтому  $\kappa \neq \beta$ . Положим  $\tau = (1 - \beta) / (\kappa - \beta)$ ,  $t = \kappa \tau$ . Тогда  $z_2 = \tau \hat{z}$ ,  $z_1 = t \hat{z}$  (если  $A_h z_2 = u_\delta$ , то берем  $\hat{z} = z_2$ ,  $\tau = 1$ ,  $t = \kappa$ ). Поскольку  $z_1 \neq z_2$ , то  $t \neq \tau$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(z_1) &= \delta + h \|z_1\| + \|A_h z_1 - u_\delta\| = \\ &= \delta + |t| \|\hat{z}\| + \|t A_h \hat{z} - t u_\delta + t u_\delta - u_\delta\| = \\ &= \delta + |t| \|\hat{z}\| + |t - 1| \|u_\delta\|. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\Phi_{\eta}(z_2) = \delta + |t| \|\hat{z}\| + |\tau - 1| \|u_{\delta}\|,$$

причем

$$\Phi_{\eta}(z_1) = \Phi_{\eta}(z_2).$$

Подставляя выражения для  $z_1, z_2$  и  $\lambda = 1/2$  в равенства (61), получаем, сократив на  $\|\hat{z}\| \neq 0, \|u_{\delta}\| \neq 0,$

$$|t + \tau| = |t| + |\tau|,$$

$$|t - 1 + \tau - 1| = |t - 1| + |\tau - 1|,$$

т.е.  $t, \tau$  (аналогично  $t - 1, \tau - 1$ ) либо неотрицательны, либо неположительны. Пусть сначала  $t \geq 0, \tau \geq 0, t - 1 \leq 0, \tau - 1 \leq 0$ . Тогда из равенства  $\Phi_{\eta}(z_1) = \Phi_{\eta}(z_2)$  следует

$$(1 - t) \|u_{\delta}\| + th \|\hat{z}\| + \delta = (1 - \tau) \|u_{\delta}\| + \tau h \|\hat{z}\| + \delta,$$

т.е.  $(t - \tau)h \|\hat{z}\| = (t - \tau) \|u_{\delta}\|$ . Так как  $t \neq \tau$ , то отсюда вытекает справедливость п. 3 леммы.

Если  $t \geq 0, \tau \geq 0, t - 1 \geq 0, \tau - 1 \geq 0$ , то

$$(t - 1) \|u_{\delta}\| + th \|\hat{z}\| + \delta = (\tau - 1) \|u_{\delta}\| + \tau h \|\hat{z}\| + \delta$$

или  $(t - \tau)h \|\hat{z}\| = (\tau - t) \|u_{\delta}\|$ , что невозможно, так как  $t \neq \tau, \|\hat{z}\| > 0, \|u_{\delta}\| > 0$ .

Аналогично рассматривается случай  $t \leq 0, \tau \leq 0, t - 1 \geq 0, \tau - 1 \geq 0$ , при котором справедлив п. 3 леммы, и случай  $t \leq 0, \tau \leq 0, t - 1 \leq 0, \tau - 1 \leq 0$ , который невозможен. Итак,  $\Phi_{\eta}(\hat{z}) = h \|\hat{z}\| + \delta = \min_{z \in Z} \Phi_{\eta}(z)$ .

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что  $\hat{z}$  — нормальное решение уравнения  $A_h z = u_{\delta}$ . На самом деле, пусть  $z'$  — решение уравнения  $A_h z = u_{\delta}$  и  $\|z'\| < \|\hat{z}\|$ . Тогда

$$\Phi_{\eta}(z') = \delta + h \|z'\| < \Phi_{\eta}(\hat{z}) = \delta + h \|\hat{z}\| = \min_{z \in Z} \Phi_{\eta}(z),$$

что невозможно.

То, что отрезок  $[0, \hat{z}] \subseteq Z_{\min}$ , следует из равенства п. 3

$$\Phi_{\eta}(0) = \delta + \|u_{\delta}\| = \Phi_{\eta}(\hat{z}) = \delta + h \|\hat{z}\|$$

и выпуклости  $Z_{\min}$ . Лемма доказана.

**С л е д с т в и е.** Если неравенство (58) не выполняется, то задача минимизации  $\Phi_{\eta}(z)$  при  $h > 0$  имеет единственное решение  $\hat{z}_{\eta} \neq 0$ . В этом случае, если  $A_h \hat{z}_{\eta} \neq u_{\delta}$ , функционал  $\Phi_{\eta}(z)$  дифференцируем в точке  $\hat{z}_{\eta}$  и  $\hat{z}_{\eta}$  является решением уравнения

$$\Phi'_{\eta}(z) = \frac{A_h^* A_h z - A_h^* u_{\delta}}{\|A_h z - u_{\delta}\|} + h \frac{z}{\|z\|} = 0. \quad (63)$$

В силу выпуклости  $\Phi_{\eta}(z)$  условие (63) является и достаточным условием минимума функционала  $\Phi_{\eta}(z)$ .

**Л е м м а 18 [110].** Если условие (58) не выполнено, то задача минимизации  $\Phi_{\eta}(z)$  эквивалентна задаче минимизации функционала  $M^{\alpha}[z]$

(2) с выбором параметра регуляризации из принципа наименьшей оценки невязки, т.е. выбирается  $\hat{\alpha} \geq 0$  такое, что  $\psi(\hat{\alpha}) = \min_{\alpha \geq 0} \psi(\alpha)$ , где функция

$$\psi(\alpha) \text{ определяется равенством } \psi(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\| + h \|z_\eta^\alpha\|.$$

**Доказательство.** Из леммы 17 и условия (58) следует, что решение задачи минимизации  $\Phi_\eta[z]$   $\hat{z}_\eta$  существует и единственно. Пусть  $\|\hat{z}_\eta\| = r > 0$ . Очевидно, что  $\hat{z}_\eta$  является единственным решением вариационной задачи:

найти

$$\inf \|A_h z - u_\delta\|^2, \quad \|z\|^2 \leq r^2.$$

Как показано в [90], найдется такое  $\hat{\alpha} \geq 0$ , что  $\hat{z}_\eta$  будет являться экстремалью  $M^{\hat{\alpha}}[z]$ . Так как  $\hat{z}_\eta$  — единственное решение задачи отыскания минимума  $\Phi_\eta(z)$  на всем пространстве, то тем более  $\hat{z}_\eta$  является единственным решением задачи минимизации  $\Phi_\eta(z)$  на множестве экстремалей функционала  $M^\alpha[z]$  при всех  $\alpha \geq 0$ , т.е.  $\psi(\hat{\alpha}) = \min_{\alpha \geq 0} \psi(\alpha)$ . Из непре-

рывности и строгой монотонности  $\|z_\eta^\alpha\|$  как функции  $\alpha$  (лемма 5) следует, что значение  $\hat{\alpha}$  единственно. Заметим, что  $\hat{\alpha} = 0$ , если  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \|z_\eta^\alpha\| = r = \|\hat{z}_\eta\|$ , и, как показано при доказательстве теоремы 3, в этом случае  $\hat{z}_\eta$  является нормальным псевдорешением уравнения  $A_h z = u_\delta$ . Лемма доказана.

В заключение параграфа докажем следующую теорему, в которой дается обоснование метода наименьшей оценки невязки.

**Т е о р е м а 10 [111].** Пусть  $h > 0$ . Метод наименьшей оценки невязки эквивалентен следующему принципу обобщенной невязки. Если выполнено условие (58), то полагаем  $\hat{z}_\eta = 0$ . В противном случае  $\hat{z}_\eta$  находится как экстремаль функционала (2)  $M^\alpha[z]$  с выбором параметра регуляризации из условия минимума при  $\alpha \geq 0$  функции  $\psi(\alpha)$ ; при этом функция  $\psi(\alpha)$  непрерывно дифференцируема при  $\alpha > 0$ , имеет единственную точку  $\hat{\alpha}$  локального минимума, являющуюся также точкой глобального минимума на  $[0, +\infty)$ ;  $\hat{z}_\eta = z_\eta^{\hat{\alpha}}$ . Если  $\hat{\alpha} \neq 0$ , то  $\hat{\alpha}$  — единственное решение уравнения

$$\alpha \|z_\eta^\alpha\| = h \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|. \quad (64)$$

**Доказательство.** Если выполнено условие (58), то в соответствии с леммами 16, 17  $\hat{z}_\eta = 0$ . Рассмотрим второй случай. Напомним, что  $z_\eta^\alpha$  является решением уравнения Эйлера (5) для функционала  $M^\alpha[z]$ , поэтому

$$A_h^* A_h z_\eta^\alpha - A_h^* u_\delta = -\alpha z_\eta^\alpha. \quad (65)$$

В соответствии с результатами § 4 (лемма 5) функция  $\psi(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\| + h \|z_\eta^\alpha\|$  непрерывно дифференцируема при  $\alpha > 0$  и ее производная равна

$$\psi'(\alpha) = \frac{1}{2} ((A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} z_\eta^\alpha, z_\eta^\alpha) \left( \frac{\alpha}{\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|} - \frac{h}{\|z_\eta^\alpha\|} \right). \quad (66)$$

Если  $\psi(\alpha)$  имеет стационарную точку (локальный экстремум), то  $\psi'(\alpha) = 0$  и выполнено условие (64). Но учитывая (64), (65), получаем, что выполнено достаточное условие экстремума  $\Phi_\eta(z)$  (63), т.е. экстремали функционала  $M^\alpha[z]$ , соответствующие значениям параметра регуляризации  $\alpha$  – решениям уравнения  $\psi'(\alpha) = 0$ , являются экстремалими функционала  $\Phi_\eta(z)$ . По лемме 17 экстремаль функционала  $\Phi_\eta(z)$  единственна, а в соответствии с леммой 18 существует единственное значение  $\hat{\alpha} \geq 0$  такое, что  $\hat{\alpha}$  является точкой глобального минимума  $\psi(\alpha)$  на  $[0, +\infty)$  и  $\hat{z}_\eta = z_{\hat{\alpha}}$ . Таким образом,  $\psi(\alpha)$  не имеет локальных минимумов. Теорема доказана.

Результаты теоремы положены в основу численного алгоритма, реализованного на ЭВМ.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ  
НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ**

В гл. I обсуждались общие вопросы построения регуляризирующих алгоритмов для решения широкого круга некорректных задач. В данной главе подробно остановимся на том случае, когда априори известно, что точное решение задачи принадлежит некоторому компактному множеству. Идея такого подхода была впервые высказана еще в 1943 г. [164].

В [85–87] было введено понятие квазирешения как приближенного решения некорректной задачи на компактном множестве. Там же был доказан ряд теорем о существовании, единственности и непрерывной зависимости квазирешения от правой части. Можно указать достаточно общий подход для приближенного нахождения квазирешений [79, 87].

Построению приближенного решения некорректных задач на компактных множествах посвящены работы [215, 216]. Здесь множество корректности – образ шара при отображении вполне непрерывным оператором. Связанные с этим вопросы подробно обсуждаются в [90, 108]. В указанных работах множество корректности – некоторое абстрактное множество.

На наш взгляд, представляют интерес две следующие задачи.

**Задача 1.** Какой "качественной" информации о точном решении достаточно, чтобы выделить множество корректности?

**Задача 2.** Как научиться эффективно решать некорректную задачу, если такое множество выделено?

Для некоторых специальных задач (обратная задача теории потенциала, некоторые задачи теории аналитических функций) ряд интересных результатов по определению множества корректности был получен в работах [215, 85, 83, 84, 104–106, 147, 148].

В работах [74, 196] впервые было указано на то, что для широкого класса обратных задач математической физики, таких как обратные задачи геофизики, распознавания образов, диагностики плазмы, астрофизики, существует априорная информация о характере искомого решения (его монотонность, выпуклость и т.п.). Используя такую информацию, можно построить эффективные алгоритмы приближенного решения некорректных задач [49, 54, 65–67].

Применение методов решения некорректно поставленных задач, основанных на использовании априорной информации о поведении неизвестных функций, позволило для целого ряда прикладных задач получить существенные результаты [6, 18–22, 69, 70, 72, 124, 94, 200].



**§ 1. О приближенном решении некорректных задач на компактных множествах**

Рассмотрим некорректно поставленную задачу

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U. \quad (1)$$

Здесь  $z, u$  принадлежат некоторым функциональным нормированным пространствам  $Z[a, b], U[c, d]$ , а оператор  $A: Z \rightarrow U$  непрерывен. Пусть, как обычно, вместо точных значений  $\bar{u} = A\bar{z}$  и  $A$  нам известны такие их приближения  $u_\delta$  и непрерывный оператор  $A_h$ , что  $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta, \|A_h z - Az\| \leq \psi(h, \|z\|)$ . (см. § 8 гл. I). Если операторы  $A, A_h$  линейны, то  $\psi(h, y) = hy$ . Пусть априори известно, что точное решение задачи  $\bar{z}$  принадлежит некоторому компакту  $M$ , а оператор  $A$  взаимно однозначно отображает  $M$  на  $AM \subset U$ . Пусть, как и ранее,  $\eta = (\delta, h)$ .

Определим множество  $Z_M(\eta)$  таких элементов  $z_\eta \in M$ , что

$$\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leq \psi(h, \|z_\eta\|) + \delta$$

(заметим, что множество  $Z_M(\eta)$  определяется заданием значений  $\eta, A_h, u_\delta$ ). Множество  $Z_M(\eta)$  для всякого  $\eta > 0$  непусто, так как содержит элемент  $\bar{z}$ .

*Лемма 1.* Пусть  $z_\eta$  — произвольный элемент множества  $Z_M(\eta)$ . Тогда  $z_\eta \rightarrow \bar{z} \notin Z$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Множество  $M$  — компакт в пространстве  $Z$ , поэтому

$$\sup_{z \in M} \|z\| = C_0 < +\infty.$$

Поскольку  $z_\eta \in Z_M(\eta)$ , то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|Az_\eta - A\bar{z}\| &\leq \|Az_\eta - A_h z_\eta\| + \\ &+ \|A_h z_\eta - u_\delta\| + \|u_\delta - \bar{u}\| \leq 2(\psi(h, \|z_\eta\|) + \delta). \end{aligned}$$

Из свойств функции  $\psi(h, \|z\|)$  и непрерывности оператора  $A^{-1}$  на множестве  $AM$  [95] и последнего неравенства следует справедливость леммы.

Таким образом, если  $\bar{z} \in M$ , то за приближенное решение задачи (1) можно принять произвольный элемент  $z_\eta$  из множества  $Z_M(\eta)$ . При этом, если  $h = 0$ , то за приближенное решение задачи (1) можно принять такой произвольный элемент  $z_\delta$  из  $M$ , что  $\|Az_\delta - u_\delta\| \leq \delta$ .

Рассмотрим вопрос погрешности приближенного решения. В качестве погрешности фиксированного приближения решения  $z_\eta^*$  задачи (1) с приближенно заданной правой частью  $u_\delta$  и приближенным оператором  $A_h$  на множестве априорных ограничений  $D \subset Z$  естественно использовать величину

$$\epsilon(\eta) = \sup_z \|z_\eta^* - z\|, \quad z \in \{z: z \in D, \|A_h z - u_\delta\| \leq \psi(h, \|z\|) + \delta\}.$$

Ясно, что  $\|z_\eta^* - \bar{z}\| \leq \epsilon(\eta)$ . Отметим, что вопрос погрешности уклонения приближенного решения некорректной задачи (1) от точного решения имеет смысл лишь тогда, когда  $D$  — компакт в  $Z$ ,  $D = M$ . В этом случае  $\epsilon(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Таким образом, в случае, когда априори известно, что точное решение  $\bar{z}$  задачи (1) принадлежит компакту, можно не только указать приближенное решение некорректно поставленной задачи (1), но и найти оценку погрешности приближения.

## § 2. Некоторые теоремы о равномерном приближении к точному решению некорректно поставленных задач

В целом ряде обратных задач математической физики существует априорная информация о монотонности искомого решения. Этой информации оказывается достаточно для построения устойчивых алгоритмов приближенного решения уравнения (1).

Пусть априори известно, что точное решение  $\bar{z}(s)$  некорректно поставленной задачи (1) есть монотонная на отрезке функция (для определенности будем считать ее невозрастающей), ограниченная сверху и снизу соответственно константами  $C_1$  и  $C_2$ . Не уменьшая общности, будем считать, что  $C_1 = C > 0$ ,  $C_2 = 0$ . Введем в рассмотрение множество  $Z \downarrow_C$  невозрастающих функций  $z(s)$ , ограниченных константами  $C$  и  $0$ , т.е.

$$C \geq z(s) \geq 0 \quad \forall s \in [a, b].$$

Пусть  $z_1(s), z_2(s), \dots, z_n(s), \dots$  – последовательность функций из  $Z \downarrow_C$ . Тогда согласно теореме Хелии [95] существует такая функция  $z(s) \in Z \downarrow_C$  и такая последовательность индексов  $n_k$ , что в каждой точке  $s \in [a, b]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}(s) = z(s).$$

Из сходимости в каждой точке и равномерной ограниченности следует сходимость в  $L_p[a, b]$ ,  $p > 1$ . Таким образом,  $Z \downarrow_C$  – компакт в  $L_p$ . Будем считать, что  $Z = L_p[a, b]$ ,  $p > 1$ , а оператор  $A$  взаимно однозначно отображает  $Z \downarrow_C$  на  $AZ \downarrow_C$ , т.е. из равенства  $\|Az_1 - Az_2\| = 0$ ,  $z_1, z_2 \in Z \downarrow_C$ , следует, что  $z_1 = z_2$ .

Введем в рассмотрение множество  $Z \downarrow_C(\eta)^*$  таких элементов  $z$  из  $Z \downarrow_C$ , что

$$\|A_h z - u_\delta\| \leq \psi(h, \|z\|) + \delta.$$

Элементы этого множества будем обозначать через  $z_\eta$ .

Из леммы 1 следует, что произвольный элемент  $z_\eta$  из  $Z \downarrow_C(\eta)$  является приближенным решением задачи (1), причем  $z_\eta \rightarrow \bar{z}$  в  $L_p$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Пусть известно, что решение задачи  $\bar{z}(s) \in Z \downarrow_C$  – непрерывная на  $[a, b]$  функция, и пусть  $\eta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда справедливо более сильное утверждение.

**Теорема 1** [74, 75]. Пусть  $\bar{z}(s) \in C[a, b]$ ,  $z_n$  – произвольный элемент из  $Z \downarrow_C(\eta_n)$ . Пусть  $[\gamma, \sigma]$  – произвольный фиксированный отрезок из  $(a, b)$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $z_n(s)$  сходится к  $\bar{z}(s)$  равномерно на  $[\gamma, \sigma]$ .

\* Множество  $Z \downarrow_C(\eta)$  определяется заданием элементов  $A_h, u_\delta, b, h$ .

**Доказательство.** Покажем сначала, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $z_n(s)$  сходится к  $z(s)$  в каждой точке  $s \in (a, b)$ . Согласно теореме Хелли из последовательности  $z_n$  всегда можно выбрать подпоследовательность  $z_{n_k}$ , сходящуюся в каждой точке  $s \in [a, b]$ , а следовательно, и в  $Z$ , к некоторой функции  $\bar{z}(s) \in Z \downarrow C$ . Пусть  $A_{n_k}', u_{\delta_k}'$  — подпоследовательности соответственно из  $A_{n_n}, u_{\delta_n}$ .

Легко убедиться в справедливости оценки

$$\|A\bar{z} - \bar{u}\| \leq \|A\bar{z} - Az_{n_k}\| + \|Az_{n_k} - A_{n_k}'z_{n_k}\| + \\ + \|A_{n_k}'z_{n_k} - u_{\delta_k}'\| + \|u_{\delta_k}' - \bar{u}\| \leq \epsilon_k + 2(\psi(H_k', \|z_{n_k}\|) + \delta_{n_k}'),$$

причем  $z_{n_k}$  равномерно ограничены в  $Z$ , а  $\epsilon_k = \|A\bar{z} - Az_{n_k}\|$ .

В силу того, что  $z_{n_k} \rightarrow \bar{z}$  в  $Z$ , а оператор  $A$  непрерывен,  $\epsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что  $A\bar{z} = \bar{u}$ , а тогда в силу взаимной однозначности отображения  $A$  справедливо равенство  $\bar{z} = \bar{z}$ , т.е.  $\bar{z}(s) = \bar{z}(s)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

Покажем, что  $\bar{z}(s) = \bar{z}(s)$  в каждой внутренней точке  $s_0 \in (a, b)$ . Предположим, что  $\bar{z}(s_0) \neq \bar{z}(s_0)$ . Пусть для определенности  $\bar{z}(s_0) = \bar{z}(s_0) + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . Функция  $\bar{z}(s)$  по условию теоремы непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , в том числе и в точке  $s_0$ . Следовательно, существует такое  $\delta > 0$ , что  $|\bar{z}(s) - \bar{z}(s_0)| < \epsilon/2$  для любых  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ . Поскольку  $\bar{z}(s)$  монотонно не возрастает, то для любых  $s \in (s_0 - \delta, s_0)$  выполняется неравенство  $\bar{z}(s) - \bar{z}(s) \geq \epsilon/2$ . Но тогда  $\|\bar{z} - \bar{z}\|_{L, p} > 0$ , что противоречит тому, что  $\bar{z}(s) = \bar{z}(s)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

Таким образом,  $\bar{z}(s) = \bar{z}(s)$  в каждой внутренней точке  $s \in (a, b)$ . Поскольку из последовательности  $z_n$  всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, а сходятся они, как мы убедились, к одному и тому же элементу  $\bar{z}(s)$ , то это означает, что и сама последовательность  $z_n(s)$  сходится к  $\bar{z}(s)$  при  $n \rightarrow \infty$  в каждой точке  $s \in (a, b)$ . Покажем теперь, что последовательность  $z_n$  сходится к  $\bar{z}(s)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на каждом отрезке  $[\gamma, \sigma] \subset [a, b]$ . Зафиксируем произвольное число  $\epsilon > 0$ . Из равномерной непрерывности  $\bar{z}(s)$  на отрезке  $[\gamma, \sigma]$  следует, что для  $\forall \epsilon > 0$  существует такое  $\delta(\epsilon) > 0$ , что для любых  $s_1, s_2 \in [\gamma, \sigma]$  таких, что  $|s_1 - s_2| < \delta(\epsilon)$ , выполняется неравенство  $|\bar{z}(s_1) - \bar{z}(s_2)| < \epsilon/4$ .

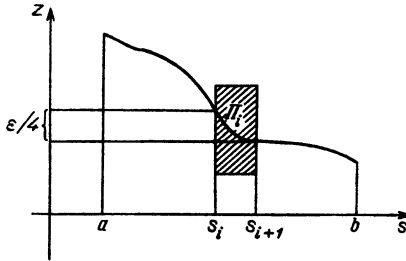
Разобьем отрезок  $[\gamma, \sigma]$  точками  $\gamma = s_1 < s_2 < \dots < s_m = \sigma$  таким образом, чтобы  $|s_{i+1} - s_i| < \delta(\epsilon)$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ). Выберем  $N(\epsilon)$  так, чтобы для любой точки разбиения  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) при  $n > N(\epsilon)$  выполнялись неравенства

$$|z_n(s_i) - \bar{z}(s_i)| < \epsilon/4.$$

Из монотонности  $\bar{z}(s)$  и  $z_n(s)$  следует, что для любых  $s \in [s_i, s_{i+1}]$  график функции  $z_n(s)$  принадлежит прямоугольнику  $\Pi_i$  и, следовательно, выполняется неравенство  $|z_n(s) - \bar{z}(s)| < \frac{3\epsilon}{4} < \epsilon$ , как только  $n > N(\epsilon)$  (рис. 2.1).

**З а м е ч а н и я.** 1. Интересен тот факт, что функция  $z_\eta(s)$  не является, вообще говоря, непрерывной. В теореме 1 важно, чтобы  $\bar{z}(s)$  была непрерывной, а приближенное решение  $z_\eta(s)$  может быть разрывной монотонной функцией. Тем не менее  $z_\eta(s) \rightarrow \bar{z}(s)$  при  $\eta \rightarrow 0$  равномерно на любом отрезке  $[\gamma, \sigma] \subset (a, b)$ .

2. Теорема 1 легко обобщается на случай, когда точное решение задачи (1) есть кусочно-непрерывная функция. В этом случае последовательность приближений будет сходиться к  $\bar{z}(s)$  равномерно на каждом замкнутом отрезке, не содержащем точек разрыва функции  $\bar{z}(s)$  и точек  $s = a$ ,  $s = b$ .



Р и с. 2.1

Таким образом, в случае, когда априори известно, что точное решение  $\bar{z}(s)$  некорректно поставленной задачи (1) есть монотонная ограниченная функция, за приближенное решение задачи можно принять произвольный элемент  $z_\eta$  из множества  $Z \downarrow_C(\eta)$ . При этом  $z_\eta \xrightarrow{L_p} \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Более того, если  $\bar{z}(s)$  — кусочно-непрерывная функция, то имеет место равномерная сходимости последовательности приближенных решений к точному решению задачи на каждом замкнутом отрезке, не содержащем точек разрыва функции  $\bar{z}(s)$  и точек  $s = a$ ,  $s = b$ .

Кроме априорной информации о монотонности точного решения некорректно поставленной задачи (1) в ряде обратных задач есть основания предполагать, что точное решение  $\bar{z}(s)$  является выпуклой или монотонной выпуклой функцией.

Введем в рассмотрение множество  $\check{Z}_C$  выпуклых (для определенности вверх) функций, ограниченных сверху и снизу соответственно константами  $C$  и  $0$ . Пусть также  $\check{Z} \downarrow_C$  — множество выпуклых (вверх) невозрастающих ограниченных константой  $C$  неотрицательных функций ( $\check{Z} \downarrow_C = Z \downarrow_C \cap \check{Z}_C$ ).

Будем вместе с  $Z \downarrow_C(\eta)$  рассматривать множества  $\check{Z}_C(\eta)$ ,  $\check{Z} \downarrow_C(\eta)$ . Аналогично,  $Z \downarrow_C(\eta)$  — это множество таких функций  $z_\eta$  соответственно из  $\check{Z}_C$  и  $\check{Z} \downarrow_C$ , что

$$\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leq \psi(h, \|z_\eta\|) + \delta.$$

Пусть, как и прежде,  $\eta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а  $\bar{z}(s) \in \check{Z} \downarrow_C$  (либо  $\check{Z}_C$ ). Будем считать, что оператор  $A$  взаимно однозначно отображает  $\check{Z} \downarrow_C(\check{Z}_C)$  на  $A\check{Z} \downarrow_C(A\check{Z}_C)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $z_n$  – произвольный элемент из  $\check{Z}\downarrow_C(\eta_n)$  (либо  $\check{Z}_C(\eta_n)$ ), а  $[\gamma, \sigma]$  – некоторый отрезок из интервала  $(a, b)$ . Тогда последовательность  $z_n(s) \rightarrow \bar{z}(s)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $[\gamma, \sigma]$ .

Справедливость теоремы 2 для случая, когда  $\bar{z} \in \check{Z}\downarrow_C(\eta_n)$ , следует из теоремы 1. Для случая, когда  $\bar{z} \in \check{Z}_C$ , утверждение теоремы доказано в [149].

**З а м е ч а н и я.** 1. Непрерывность функции  $\bar{z}(s)$  в каждой внутренней точке  $s \in (a, b)$  следует из того, что  $\bar{z}(s) \in \check{Z}_C$ .

2. Для случая, когда  $\bar{z}(s) \in \check{Z}\downarrow_C$ , теорему 2 можно усилить. Пусть  $z_n$  – произвольный элемент из  $\check{Z}\downarrow_C(\eta_n)$ . Тогда последовательность  $z_n(s) \rightarrow \bar{z}(s)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на любом отрезке  $[a, b - \epsilon]$ ,  $\epsilon > 0$ .

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что из равенства  $\bar{z}(s) \stackrel{Lp}{=} \bar{z}(s)$ ,  $\bar{z}, \bar{z} \in \check{Z}\downarrow_C$ , следует, что  $\bar{z}(a) = \bar{z}(a)$ .

3. В случае, когда  $\bar{z}(s) \in \check{Z}\downarrow_C$  (или  $\check{Z}_C$ ), имеет место не только равномерная сходимость приближений, но и при определенных условиях сходимость их производных [149].

Таким образом, за приближенное решение некорректно поставленной задачи (1), когда  $\bar{z}(s) \in \check{Z}\downarrow_C$  (или  $\check{Z}_C$ ), можно принять произвольный элемент из множества  $\check{Z}\downarrow_C(\eta)$  (или  $\check{Z}_C(\eta)$ ).

Доказанные в настоящем параграфе утверждения позволяют для построения приближенных решений использовать какой-либо процесс минимизации функционала невязки  $\Phi(z) = \|A_h z - u_\delta\|^2$  соответственно на множествах  $Z\downarrow_C$ ,  $\check{Z}\downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$ . При этом, если операторы  $A, A_h$  – линейные, достаточно найти такой элемент  $z_\eta$ , принадлежащий указанному множеству, для которого  $\Phi(z_\eta) \leq (hC_0 + \delta)^2$ , где  $C_0 = C\sqrt{b-a}$ . В случае линейной задачи (когда операторы  $A, A_h$  линейны) задача минимизации функционала  $\Phi(z)$  на множествах  $Z\downarrow_C$ ,  $\check{Z}\downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$  – задача выпуклого программирования.

### § 3. Некоторые теоремы о выпуклых многогранниках в $\mathbf{R}^n$

В настоящем параграфе рассматриваются свойства конечно-разностной аппроксимации множеств  $Z\downarrow_C$ ,  $\check{Z}\downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$ . Эти свойства будут использованы в дальнейшем при построении алгоритмов приближенного решения задачи (1) на компактах  $Z\downarrow_C$ ,  $\check{Z}\downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$ . При численной реализации этих алгоритмов будем использовать равномерные сетки по  $s$  на отрезке  $[a, b]$ .

При переходе к конечно-разностной аппроксимации задачи (1) функционал невязки  $\Phi(z)$ , определенный на множествах  $Z\downarrow_C$ ,  $\check{Z}\downarrow_C$  или  $\check{Z}_C$ , заменяется его конечно-разностной аппроксимацией – функцией  $\Phi(z)$ , определенной на  $\mathbf{R}^n$ . При этом множества  $Z\downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$ ,  $\check{Z}\downarrow_C$  переходят соответственно в следующие множества векторов из  $\mathbf{R}^n$  \*):

$$M\downarrow_C = \left\{ z: z \in \mathbf{R}^n, \begin{array}{l} z_{i+1} - z_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 \leq z_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}, \quad (2)$$

\*) Здесь  $z_i = z(s_i)$  – значение функции  $z(s)$  в узлах сетки.

$$\check{M}_C = \left\{ z: z \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{l} z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ 0 \leq z_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}, \quad (3)$$

$$\check{M} \downarrow_C = \left\{ z: z \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{l} z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ z_{i+1} - z_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 \leq z_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Покажем, что каждое из множеств  $M \downarrow_C$ ,  $\check{M}_C$ ,  $\check{M} \downarrow_C$  представляет собой замкнутый выпуклый ограниченный многогранник в  $\mathbb{R}^n$ , и найдем вершины этих многогранников. Для этого нам понадобятся некоторые тривиальные сведения о многогранниках в  $\mathbb{R}^n$ . Будем придерживаться следующей терминологии.

Будем говорить, что векторы  $z_j \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) *выпукло независимы*, если ни один из них не является выпуклой комбинацией остальных.

*Выпуклым многогранником* в  $\mathbb{R}^n$  будем называть выпуклую оболочку конечного числа векторов  $z_j \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ).

Точку  $z$  назовем *вершиной* выпуклого многогранника  $M = C\{z_j\}_{j=1}^l = \{x: x = \sum_{j=1}^l a_j z_j, a_j \geq 0, \sum_{j=1}^l a_j = 1\}$ , если существует такой вектор  $b \in \mathbb{R}^n$ , что для любого вектора  $x \in M$  справедливо неравенство  $(b, x - z) \geq 0$  и равенство достигается лишь при  $x = z$ .

Не представляет сложности доказательство следующих тривиальных утверждений [185].

**Л е м м а 2.** Пусть дан выпуклый многогранник  $M = C\{z_i\}_{i=0}^m$ . Пусть  $t$  — вершина  $M$ . Тогда существует такое  $p: 0 \leq p \leq m$ , что  $z_p = t$ .

**Л е м м а 3.** Пусть дан выпуклый многогранник  $M = C\{z_i\}_{i=0}^m$ . Тогда для того, чтобы элемент  $z_0 \in M$  являлся вершиной  $M$ , необходимо и достаточно, чтобы  $z_0$  не являлся выпуклой комбинацией  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

**Л е м м а 4.** Всякий выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин.

Эта лемма является тривиальным следствием лемм 2, 3. Таким образом, если нужно выяснить, дает ли набор векторов  $z_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) все вершины некоторого выпуклого многогранника  $M \subset \mathbb{R}^n$ , то необходимо проверить выполнение двух условий:

а) любой вектор  $z \in M$  можно представить в виде выпуклой комбинации  $z_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ );

б) векторы  $z_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) выпукло независимы.

**Т е о р е м а 3.** Множество  $M \downarrow_C$  представляет собой выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^n$ , вершины которого  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) можно выписать в явном виде:

$$T^{(0)} = 0,$$

$$T_i^{(j)} = \begin{cases} C, & i \leq j, \\ 0, & i > j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

**Доказательство.** Покажем, что векторы  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) линейно независимы. Действительно, пусть

$$\sum_{j=1}^n c_j T^{(j)} = 0. \quad (6)$$

Определим оператор  $\delta_k$ , действующий из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}$ , следующим образом:

$$\delta_k u = u_{k+1} - u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Поддействовав оператором  $\delta_k$  на равенство (6), получим

$$0 = \delta_k \sum_{j=0}^n c_j T^{(j)} = \sum_{j=0}^n c_j \delta_k T^{(j)} = c_k \delta_k T^{(k)} = -C c_k.$$

Отсюда следует, что  $c_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Рассмотрев  $n$ -ю компоненту равенства (6), получим  $C c_n = 0$ , т.е.  $c_n = 0$ . Линейная независимость  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) доказана.

Покажем теперь, что любой вектор  $z \in M \downarrow_C$  можно представить в виде выпуклой комбинации  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Поскольку векторы  $T^{(j)}$  образуют базис в  $\mathbf{R}^n$ , то существуют такие числа  $a_j$ , что

$$z = \sum_{j=1}^n a_j T^{(j)}. \quad (7)$$

Поддействовав на равенство (7) оператором  $\delta_k$ , получим

$$\delta_k z = a_k \delta_k T^{(k)} = a_k (-C), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Отсюда

$$a_k = \frac{\delta_k z}{\delta_k T^{(k)}} = \frac{z_{k+1} - z_k}{-C}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Поскольку  $z \in M \downarrow_C$ , то  $\delta_k z \leq 0$ . Таким образом,  $a_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ). Легко видеть, что  $a_n = z_n/C \geq 0$ .

Рассмотрев равенство (7) для первой компоненты, получим, что

$$\sum_{j=1}^n a_j = z_1/C \leq 1.$$

Поскольку  $T^{(0)} = 0$ , то

$$z = \sum_{j=1}^n a_j T^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j T^{(j)},$$

причем  $a_j \geq 0$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ),  $\sum_{j=0}^n a_j = 1$ . Здесь  $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^n a_j \geq 0$ .

Нам осталось доказать, что векторы  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) выпукло независимы. Выше было показано, что векторы  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) линейно независимы, поэтому ясно, что  $T^{(0)} = 0$  не может быть выпуклой комбинацией этих  $T^{(j)}$ . Предположение, что один из векторов  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) является выпуклой комбинацией остальных, приводит также к линейной зависимости векторов  $T^{(j)}$ .

**Теорема 4.** Множество  $\check{M}\downarrow_C$  представляет собой выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^n$ , вершины которого  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) выписываются в явном виде:

$$T^{(0)} = 0,$$

$$T_i^{(j)} = \begin{cases} C, & i \leq j, \\ \frac{n-i}{n-j} C, & i > j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (8)$$

**Доказательство.** Покажем, что векторы  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) линейно независимы. Определим оператор  $\delta_k^{(2)}$ , действующий из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$ , следующим образом:

$$\delta_k^{(2)} u = u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1.$$

Предположим, что существуют такие  $c_j$ , что

$$\sum_{j=1}^n c_j T^{(j)} = 0. \quad (9)$$

Поддействував на (9) оператором  $\delta_k^{(2)}$ , получим

$$\sum_{j=1}^n c_j \delta_k^{(2)} T^{(j)} = c_k \delta_k^{(2)} T^{(k)} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n-1.$$

Поскольку  $\delta_k^{(2)} T^{(k)} < 0$ , то  $c_k = 0$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ). Рассмотрев в равенстве (9)  $n$ -ю компоненту, получим, что  $c_n = 0$ .

Поддействував на (9) оператором  $\delta_1$ , получим  $c_1 \delta_1 T^{(1)} = 0$ . Поскольку  $\delta_1 T^{(1)} \neq 0$ , то  $c_1 = 0$ . Линейная независимость  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) доказана.

Покажем, что всякий вектор  $z \in \check{M}\downarrow_C$  можно представить в виде выпуклой комбинации  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ). Поскольку векторы  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) линейно независимы, то существуют такие числа  $a_j$ , что

$$z = \sum_{j=1}^n a_j T^{(j)}. \quad (10)$$

Поддействував на (10) оператором  $\delta_k^{(2)}$ , получим

$$\delta_k^{(2)} z = \sum_{j=1}^n a_j \delta_k^{(2)} T^{(j)} = a_k \delta_k^{(2)} T^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1.$$

Отсюда следует, что  $a_k = \delta_k^{(2)} z / \delta_k^{(2)} T^{(k)}$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ). Поскольку  $z \in \check{M}\downarrow_C$ , то легко убедиться в том, что  $a_k \geq 0$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ). Используя  $n$ -ю компоненту равенства (10), получим, что  $z_n = a_n C$ , или  $a_n = z_n / C \geq 0$ .

Поддействував на равенство (10) оператором  $\delta_1$ , получим

$$\delta_1 z = \sum_{j=1}^n a_j \delta_1 T^{(j)} = a_1 \delta_1 T^{(1)}.$$

Отсюда  $a_1 = \delta_1 z / \delta_1 T^{(1)} \geq 0$ . Таким образом, равенство (10) однозначно



определяет  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), причем все  $a_j \geq 0$ . Рассмотрим теперь 1-ю компоненту равенства (10), получим

$$z_1 = C \sum_{j=1}^n a_j,$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_j = z_1/C \leq 1.$$

Следовательно, любой вектор  $z \in \check{M} \downarrow_C$  можно представить в виде  $z = \sum_{j=0}^n a_j T^{(j)}$ , причем  $a_j \geq 0$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ),  $\sum_{j=0}^n a_j = 1$ . Здесь  $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^n a_j \geq 0$ .

Остается доказать выпуклую независимость векторов  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ). Это делается абсолютно так же, как и при доказательстве теоремы 3.

**Теорема 5 [113].** Множество  $\check{M}_C \subset \mathbb{R}^n$  является выпуклым многогранником в  $\mathbb{R}^n$ , вершины которого  $T^{(i,j)}$ ,  $0 \leq i \leq j \leq n$ , можно выписать в явном виде:

$$T^{(0,0)} = 0,$$

$$T_k^{(i,j)} = \begin{cases} \frac{k-1}{i-1} C, & k < i, \\ C, & i \leq k \leq j, \\ \frac{n-k}{n-j} C, & k > j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \end{cases}$$

Отметим, что если многогранники  $M \downarrow_C, \check{M} \downarrow_C$  имеют по  $n+1$  вершине, то многогранник  $\check{M}_C$  имеет  $n(n+1)/2 + 1$  вершину.

**Теорема 6.** Множество  $\check{M}_C$  содержится в выпуклом многограннике  $\check{M}'_{2C}$ , вершины которого  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) выписываются в явном виде:

$$T^{(0)} = 0,$$

$$T_i^{(j)} = \begin{cases} 2C \frac{i-1}{j-1}, & i < j, \\ 2C, & i = j, \\ 2C \frac{n-i}{n-j}, & i > j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (11)$$

**Доказательство.** Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теорем 3, 4, легко проверяется линейная независимость векторов  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Пусть  $z$  — произвольный вектор из  $\check{M}_C$ . Покажем, что  $z \in C\{T^{(j)}\}_{j=0}^n$ . Поскольку  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) линейно независимы, то существуют такие числа  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), что

$$z = \sum_{j=1}^n a_j T^{(j)}. \quad (12)$$

Поддействовав на (12) оператором  $\delta_k^{(2)}$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ), получим

$$\delta_k^{(2)} z = \sum_{j=1}^n a_j \delta_k^{(2)} T^{(j)} = a_k \delta_k^{(2)} T^{(k)},$$

или

$$a_k = \delta_k^{(2)} z / \delta_k^{(2)} T^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1.$$

Поскольку  $z \in \check{M}_C$ , то  $\delta_k^{(2)} z \leq 0$ , а следовательно,  $a_k \geq 0$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ). Рассмотрев в равенстве (12)  $n$ -ю компоненту, получим, что  $a_n = z_n / (2C) \geq 0$ . Первая компонента векторного равенства (12) дает  $a_1 = z_1 / (2C) \geq 0$ . Остается показать, что  $\sum_{j=1}^n a_j \leq 1$ .

Действительно, нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{i=1}^n T_i^{(j)} = \begin{cases} nC, & j = 1, n, \\ (n-1)C, & j = 2, 3, \dots, n-1. \end{cases}$$

Суммируя покомпонентно равенство (12), получим

$$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{i=1}^n T_i^{(j)} = a_1 nC + a_n nC + (n-1)C \sum_{j=2}^{n-1} a_j,$$

или

$$\sum_{i=1}^n z_i = a_1 C + a_n C + C(n-1) \sum_{j=1}^n a_j.$$

Учитывая равенства  $a_1 = z_1 / (2C)$ ,  $a_n = z_n / (2C)$ , получим

$$C(n-1) \sum_{j=1}^n a_j = \frac{z_1}{2} + \frac{z_n}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} z_j.$$

Поскольку  $z \in \check{M}_C$ , то  $z_i \leq C$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда из предыдущего неравенства следует, что  $\sum_{j=1}^n a_j \leq 1$ .

Таким образом, для произвольного элемента  $z \in \check{M}_C$  справедливо представление  $z = \sum_{j=0}^n a_j T^{(j)}$ , причем  $a_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=0}^n a_j = 1$ . Здесь  $a_0 =$

$$= 1 - \sum_{j=1}^n a_j \geq 0. \text{ Следовательно, } \check{M}_C \subset \check{M}'_{2C} = C\{T^{(j)}\}_{j=0}^n.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно проверить выпуклую независимость векторов  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ). Это легко делается аналогично теоремам 3, 4.

**З а м е ч а н и е.** Из теоремы 6 следует, что если точное решение задачи принадлежит  $\check{M}_C$ , то приближенное решение можно искать на множестве  $\check{M}'_{2C}$ . В самом деле: 1) качественная информация о выпуклости вверх "функций" сохраняется, поскольку  $\check{M}'_{2C} \subset \check{M}_{2C}$ ; 2) множество "функций" из  $\check{M}'_{2C}$  ограничено сверху константой  $2C$ , поэтому все теоремы о сходимости последовательности приближений к точному решению задачи при замене  $\check{M}_C$  на  $\check{M}'_{2C}$  останутся в силе.

Таким образом, мы подробно изучили структуру многогранников  $M \downarrow_C$ ,  $\check{M}_C$ ,  $\check{M} \downarrow_C$ . Каждый из них является выпуклым ограниченным многогранником в  $R^n$ , вершины которого известны.

#### § 4. О решении некорректно поставленных задач на множествах выпуклых функций

Вернемся к доказанным в § 1 теоремам 1, 2. Как видно из формулировок этих теорем, информация о равномерной ограниченности множества допустимых функций является существенной при их доказательстве (доказательства опираются на теорему Хелли). Однако в обратных задачах математической физики типичным является случай, когда известна константа, ограничивающая множество допустимых функций снизу (например,  $C_2 = 0$ , искомые функции неотрицательны), и неизвестна константа  $C$ . Откажемся от равномерной ограниченной сверху множества допустимых решений. Пусть  $Z \downarrow$ ,  $\check{Z}$ ,  $\check{Z} \downarrow$  — соответственно множество монотонных (невозрастающих), множество выпуклых (для определенности вверх), множество выпуклых (вверх) монотонных (невозрастающих) ограниченных неотрицательных функций. Будем считать, что оператор  $A$  линеен, ограничен и известен точно, т.е.  $h = 0^*$ ). Так же, как и в § 2, введем множество таких функций  $Z \downarrow(\delta)$ ,  $\check{Z}(\delta)$ ,  $\check{Z} \downarrow(\delta)$  соответственно из  $Z \downarrow$ ,  $\check{Z}$ ,  $\check{Z} \downarrow$ , что

$$\|Az - u_\delta\| \leq \delta.$$

Пусть  $\delta_n$  — такая произвольная последовательность, что  $\delta_n \rightarrow 0 + 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $z_n$  — произвольный элемент из  $\check{Z}(\delta_n)$ . Покажем, что все функции  $z_n$  в совокупности ограничены, т.е. существует такая константа  $C > 0$ , что для любых  $n$  выполнено неравенство  $z_n(s) \leq C$  для всех  $s \in [a, b]$ . Этот результат будет означать, что если точное решение задачи — выпуклая или монотонно выпуклая на  $[a, b]$  функция, то при поиске приближенного решения можно отказаться от ограниченности множеств  $\check{Z}_C(\eta)$ ,  $\check{Z} \downarrow_C(\eta)$ , заменив их соответственно на  $\check{Z}(\delta)$ ,  $\check{Z} \downarrow(\delta)$ .

Нетрудно убедиться в справедливости двух лемм. Пусть  $f(x)$  — неотрицательная функция, определенная на отрезке  $[a, b]$  и выпуклая вверх на этом отрезке.

**Л е м м а 5.** Пусть  $f((a+b)/2) \leq 2$ . Тогда  $f(x) \leq 4$  для любых  $x \in [a, b]$ .

\* Как и ранее, считаем, что  $Z = L_p[a, b]$ ,  $p > 1$ .

**Л е м м а 6.** Пусть  $f(x^*) > 4$  в некоторой точке  $x^* \in [a, b]$ . Тогда  $f((a+b)/2) > 2$ .

**Т е о р е м а 7.** Пусть  $z_n$  – произвольный элемент  $\check{Z}(\delta_n)$ . Тогда существует такая константа  $C > 0$ , что для всех  $n$   $z_n(s) \leq C$  при всех  $s \in [a, b]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Заметим, что в силу линейности оператора  $A$  множество  $\check{Z}(\delta_n)$  выпукло и, следовательно, выпукло множество значений функций  $z(s) \in \check{Z}(\delta_n)$  в каждой точке  $s \in [a, b]$ , в том числе и в точке  $s = s^* = (a+b)/2$ .

Предположим теперь противное, т.е. существуют подпоследовательность функций  $z_{n_k}(s)$  из  $\check{Z}(\delta_{n_k})$  и такая последовательность точек  $s_k$  из отрезка  $[a, b]$ , что  $z_{n_k}(s_k) > k$ . Тогда по лемме 6  $z_{n_k}(s^*) > 2$ , как только  $k > 4$ .

Заметим, что  $\bar{z}(s) \in \check{Z}(\delta_{n_k})$  и  $\bar{z}(s^*) \leq 1$ . Поскольку множество значений функций из  $\check{Z}(\delta_{n_k})$  в точке  $s = s^*$  выпукло, то для каждого  $k$  существует такой элемент  $z_k^0$  из множества  $\check{Z}(\delta_{n_k})$ , что  $z_k^0(s^*) = 2$ . Согласно лемме 5 все функции  $z_k^0(s)$  равномерно ограничены. Тогда в силу теоремы Хелли [95] можно выбрать последовательность  $z_{k_l}^0$ , сходящуюся в каждой точке к некоторой функции  $\bar{z} \in \check{Z}$ . Ясно, что  $z_{k_l}^0 \xrightarrow{L_p} \bar{z}$  при  $l \rightarrow \infty$  в силу равномерной ограниченности  $z_{k_l}^0$ .

В силу непрерывности оператора  $A$  имеем  $\|A\bar{z} - \bar{u}\| = 0$ , откуда следует, что  $\bar{z} \stackrel{L_p}{=} \bar{z}$ . С другой стороны,  $\bar{z}(s^*) = 2$ , а  $\bar{z}(s^*) \leq 1$ . Отсюда следует, что поскольку обе функции непрерывны в точке  $s^*$ , то  $\bar{z} \stackrel{L_p}{\neq} \bar{z}$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, в случае, когда точное решение некорректно поставленной задачи выпукло или монотонно и выпукло, для того, чтобы построить приближенное решение, нет необходимости знать константу, ограничивающую точное решение задачи сверху. Этот важный факт мы будем использовать позднее в гл. III. Для случая, когда точное решение – монотонная на  $[a, b]$  функция, аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.

## § 5. О равномерном приближении решений с ограниченной вариацией

Будем рассматривать, как и прежде, некорректно поставленную задачу  $Az = u$ ,  $z \in Z = L_p$ ,  $p > 1$ ,  $u \in U$ .

Пусть  $A$  – непрерывный оператор из  $Z$  в  $U$ . Будем предполагать, что точное решение  $z(s)$  задачи (1) – непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция ограниченной вариации. Пусть, как обычно, вместо  $A$  и  $\bar{u}$  нам известны их приближения: непрерывный оператор  $A_h$  и элемент  $u_\delta$ .

Как и прежде, будем строить алгоритмы, равномерно приближающие  $\bar{z}(s)$ . Для этого рассмотрим множество  $V \subset L_p[a, b]$  функций ограниченной вариации, и среди функций из  $V$ , приближенно удовлетворяющих уравнению (1), будем искать наиболее "гладкую". За меру гладкости примем

вариацию  $V_a^b(z)$  функции  $z$ . (Такая постановка задачи удобна в некоторых обратных задачах спектроскопии, ядерной физики, астрофизики [71].) Поскольку из равенства  $V_a^b(z_1 - z_2) = 0$  следует, что функции  $z_1(s)$  и  $z_2(s)$  могут отличаться на константу, естественно закрепить значения функций на одном из концов отрезка  $[a, b]$ . Будем для определенности считать, что нам известно значение точного решения  $\bar{z}(s)$  в точке  $s = a$ . Не уменьшая общности, положим  $\bar{z}(a) = 0$ .

Введем в рассмотрение множество  $V(\eta)$  таких элементов  $z \in V$ , что 1)  $z(a) = 0$ ; 2)  $\|A_h z - u_b\| < \psi(h, \|z\|) + \delta$ . Будем считать, что оператор  $A$  взаимно однозначно отображает  $V$  на  $AV \subset U$ , т.е. из равенства  $Az_1 \stackrel{U}{=} Az_2$  следует, что  $z_1 \stackrel{L_p}{=} z_2$ .

**Л е м м а 7.** Пусть  $z_n \rightarrow z_0$  при  $n \rightarrow \infty$  в каждой точке  $s \in [a, b]$ , причем  $z_n \in V$  и все  $V_a^b(z_n)$  ограничены в совокупности. Тогда  $z_0 \in V$ , причем  $V_a^b(z_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V_a^b(z_n)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Возьмем произвольное разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  точками  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и такую последовательность  $z_{n_k}$ , что  $V_a^b(z_{n_k}) \rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} V_a^b(z_n)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^{m-1} |z_0(\xi_i) - z_0(\xi_{i+1})| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m-1} |z_{n_k}(\xi_i) - z_{n_k}(\xi_{i+1})| \leq$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} V_a^b(z_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} V_a^b(z_n).$$

**Л е м м а 8** [185]. Пусть  $\bar{z}(s), \bar{\bar{z}}(s) \in V$ , причем  $\bar{z}(s)$  непрерывна на  $[a, b]$ . Пусть  $\bar{z}(s)$  и  $\bar{\bar{z}}(s)$  совпадают на  $[a, b]$  почти всюду. Тогда  $V_a^b(\bar{z}) \leq V_a^b(\bar{\bar{z}})$ . Если же  $\bar{z}(s)$  не совпадает с  $\bar{\bar{z}}(s)$  тождественно на  $[a, b]$ , то  $V_a^b(\bar{z}) < V_a^b(\bar{\bar{z}})$ .

Справедливы следующие утверждения.

**Т е о р е м а 8.** Функционал  $V_a^b(z)$  достигает на  $V(\eta)$  своей точной нижней грани.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $z_n$  — минимизирующая последовательность  $z_n \in V(\eta)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_a^b(z_n) = \inf_{z \in V(\eta)} V_a^b(z) = \bar{m}.$$

Покажем, что функции  $z_n$  равномерно ограничены. Ясно, что  $V_a^b(z_n) \leq C$  для любых  $n$ . С другой стороны, из определения  $V_a^b(z)$  следует, что для любой точки  $s$  из отрезка  $[a, b]$  справедливо

$$|z_n(s)| = |z_n(s) - z_n(a)| \leq C.$$

Последнее соотношение и доказывает равномерную ограниченность последовательности  $z_n(s)$ .

Теперь согласно теореме Хелли [95] из последовательности  $z_n(s)$  можно выделить подпоследовательность  $z_{n_k}(s)$ , сходящуюся при  $k \rightarrow \infty$  в каж-

дой точке  $s \in [a, b]$  к некоторой функции  $\bar{z}(s)$ . Из леммы 7 следует, что  $\bar{z}(s) \in V$ . Из сходимости в каждой точке и равномерной ограниченности следует сходимость в  $L_p$ . Таким образом,  $z_{n_k} \xrightarrow{Z} \bar{z}$  при  $k \rightarrow \infty$ . Легко убедиться в том, что

$$\|A_h \bar{z} - u_\delta\| \leq \psi(h, \|\bar{z}\|) + \delta.$$

Следовательно,  $\bar{z} \in V(\eta)$ . С другой стороны, согласно лемме 7

$$V_a^b(\bar{z}) \leq \liminf V_a^b(z_{n_k}) = \bar{m}.$$

**З а м е ч а н и е.** Теорема 8 доказана в предположении, что все функции  $z(s) \in V(\eta)$  имеют закрепленный конец:  $z(a) = 0$ . Для случая, когда оператор  $A$  из  $L_p$  в  $U$ ,  $p > 1$ , линеен, непрерывен и известен точно ( $h = 0$ ), теорему 8 можно доказать и без этого предположения. Для этого нужно лишь отдельно доказать равномерную по  $n$  ограниченность последовательности  $z_n(s)$ . Докажем, что последовательность  $z_n(s)$  в этом случае действительно равномерно ограничена.

Предположим противное. Тогда существуют такая подпоследовательность  $z_{n_k}(s)$  и такие точки  $s_k \in [a, b]$ , что последовательность  $z_{n_k}(s_k) = a_k$  — бесконечно большая. Ясно, что  $V_a^b(z_{n_k}) \leq C$  для любых  $n_k$ . Поэтому

$$a_k - C \leq z_{n_k}(s) \leq a_k + C$$

для любых  $s \in [a, b]$ . Введем в рассмотрение функции  $z^0(s) = 1$  для всех  $s \in [a, b]$  и  $y_k(s) = z_{n_k}(s) - z_{n_k}(a)$ . Очевидно, что нормы  $y_k$  ограничены в совокупности. Из линейности оператора  $A$  следует, что  $Az_{n_k} = z_{n_k}(a)Az^0 + Ay_k$ . Заметим, что  $Az^0 \neq 0$ , а элементы  $\|Ay_k\|$  ограничены в совокупности. С другой стороны, числовая последовательность  $z_{n_k}(a)$  неограничена и, стало быть, неограничена и функциональная последовательность

$$Az_{n_k} = z_{n_k}(a)Az^0 + Ay_k.$$

Однако это противоречит неравенству  $\|Az_{n_k} - u_\delta\| \leq \delta$ . Таким образом, доказано, что последовательность функций  $z_n(s)$  равномерно ограничена. Дальнейшее доказательство теоремы 8 проводится без изменений.

Пусть теперь  $z_\eta \in V(\eta)$  — произвольный элемент, для которого

$$V_a^b(z_\eta) = \inf_{z \in V(\eta)} V_a^b(z).$$

**Т е о р е м а 9 [66].** Пусть  $\bar{z}(s) \in C[a, b] \cap V$ . Тогда  $z_\eta \rightarrow \bar{z}$  равномерно на отрезке  $[a, b]$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\eta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Покажем сначала, что  $z_{\eta_n}(s) \rightarrow \bar{z}(s)$  в каждой точке  $s \in [a, b]$ . Заметим, что поскольку  $\bar{z} \in V(\eta)$  для любого  $\eta > 0$ , то  $V_a^b(z_{\eta_n}) \leq V_a^b(\bar{z})$ . Аналогично доказательству теоремы 8 можно показать, что функции  $z_{\eta_n}(s)$  равномерно ограничены. Тогда из последовательности  $z_{\eta_n}(s)$  можно выделить подпоследовательность  $z_k^0 = z_{\eta_{n_k}}$ , сходящуюся к некоторому элементу  $\bar{z} \in V$  в каждой точке, а следовательно, и в метрике пространства  $Z$ . Переходя к пределу, легко убедиться, что  $A\bar{z} = A\bar{z}$ , а следовательно,  $\bar{z} = \bar{z}$ , т.е. функции  $\bar{z}(s)$  и  $\bar{z}(s)$

совпадают на  $[a, b]$  почти всюду. Поскольку  $V_a^b(z_k^0) \leq V_a^b(\bar{z})$ , то из леммы 7 получаем

$$V_a^b(\bar{z}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} V_a^b(z_k^0) \leq V_a^b(\bar{z}),$$

т.е. получаем, что

$$V_a^b(\bar{z}) \leq V_a^b(\bar{z}).$$

Теперь согласно лемме 8  $\bar{z}(s) = \bar{z}(s)$  тождественно для любого  $s \in [a, b]$ . Таким образом, последовательность  $z_k^0(s)$  сходится при  $k \rightarrow \infty$  к  $\bar{z}(s)$  в каждой точке  $s \in [a, b]$ . Теперь доказать поточечную сходимость самой последовательности  $z_{\eta_n}(s)$  к  $\bar{z}(s)$  не составляет труда.

Докажем, что последовательность  $z_{\eta_n}(s)$  сходится при  $n \rightarrow \infty$  к  $\bar{z}(s)$  равномерно на отрезке  $[a, b]$ . Предположим противное. Тогда существуют такая подпоследовательность  $z_{\eta_{n_k}} = z_k^0$  и такие числа  $\xi_k \in [a, b]$ ,  $\epsilon > 0$ , что

$$|z_k^0(\xi_k) - \bar{z}(\xi_k)| > \epsilon.$$

Рассмотрим такое разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  точками  $x_p$ ,  $p = \overline{1, m}$ , что

$$\sum_{p=1}^{m-1} |\bar{z}(x_p) - \bar{z}(x_{p+1})| > V_a^b(\bar{z}) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Очевидно, что в силу равномерной непрерывности функции  $\bar{z}(s)$  на отрезке  $[a, b]$  разбиение  $T$  можно выбрать таким, чтобы для любых  $x', x'' \in [x_p, x_{p+1}]$ ,  $p = \overline{1, m-1}$ , выполнялось неравенство

$$|\bar{z}(x') - \bar{z}(x'')| < \epsilon/6.$$

В силу доказанной выше поточечной сходимости существует такое  $N(\epsilon)$ , что для всех  $k > N(\epsilon)$

$$|z_k^0(x_p) - \bar{z}(x_p)| < \epsilon/(4(m-1)), \quad p = 1, 2, \dots, m.$$

Выберем произвольное  $k > N(\epsilon)$ , рассмотрим элемент  $z_k^0$  и получим оценку снизу для его вариации на  $[a, b]$ . Пусть  $\xi_k \in [x_l, x_{l+1}]$ . Тогда при  $k > N(\epsilon)$  имеем

$$\begin{aligned} V_a^b(z_k^0) &\geq \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{m-1} |z_k^0(x_p) - z_k^0(x_{p+1})| + |z_k^0(x_l) - z_k^0(\xi_k)| + \\ &+ |z_k^0(x_{l+1}) - z_k^0(\xi_k)| \geq \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{m-1} |\bar{z}(x_p) - \bar{z}(x_{p+1})| - \frac{2\epsilon(m-2)}{4(m-1)} - \\ &- \frac{2\epsilon}{4(m-1)} + |\bar{z}(x_l) - z_k^0(\xi_k)| + |\bar{z}(x_{l+1}) - z_k^0(\xi_k)| \geq \\ &\geq \sum_{p=1}^{m-1} |\bar{z}(x_p) - \bar{z}(x_{p+1})| + 2|z_k^0(\xi_k) - \bar{z}(\xi_k)| - \frac{\epsilon}{2} - \frac{3\epsilon}{6} \geq \\ &\geq V_a^b(\bar{z}) + 2\epsilon - \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = V_a^b(\bar{z}) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит определению элемента  $z_k^0(s) = z_{\eta n k}(s)$  как элемента с минимальной вариацией на множестве.

**З а м е ч а н и я.** 1. Таким образом, если априори известно, что точное решение некорректно поставленной задачи (1) есть непрерывная функция ограниченной вариации, то за приближенное решение можно взять любой элемент  $z_\eta$ , который реализует минимум функционала  $V_a^b(z)$  на множестве  $V(\eta)$ . При этом можно гарантировать равномерную сходимость последовательности приближений к точному решению задачи (1). В гл. III будут рассмотрены алгоритмы, решающие эту задачу.

2. Если оператор  $A$  в  $L_p$  линеен, непрерывен и известен точно ( $h = 0$ ), то теорема 9 остается справедливой и в случае, когда мы отказываемся от предположения, что все функции  $z(s) \in V(\eta)$  имеют закрепленный конец. Доказательство равномерной ограниченности функции  $z_{\eta n}(s)$  проводится точно так же, как это было сделано в замечании к теореме 8. В остальном доказательство теоремы 9 проводится для этого случая без изменений.



**АЛГОРИТМЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ  
НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ  
НА СПЕЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ**

В гл. II нам удалось в ряде случаев решить первую, поставленную нами задачу — как, исходя из качественной информации об искомом решении, выделить компактное множество корректности  $M$ , содержащее точное решение. Как было показано, это легко сделать, если точное решение задачи принадлежит  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$ ,  $\check{\check{Z}} \downarrow_C$ . Равномерное приближение к точному решению задачи можно построить, если точное решение — непрерывная функция ограниченной вариации. Перейдем теперь ко второй задаче — как построить эффективные численные алгоритмы решения некорректной задачи на указанных выше множествах.

**§ 1. Применение метода условного градиента  
для решения задач на специальных множествах**

Остановимся сначала на решении некорректно поставленной задачи

$$Az = u, \quad z \in M \subset Z = L_2, \quad u \in U, \quad (1)$$

при условии, что оператор  $A$  из  $Z$  в  $U$  непрерывен, линеен и известен точно ( $h = 0$ ). В качестве  $M$  будем рассматривать одно из множеств  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$  или  $\check{\check{Z}} \downarrow_C$ . Будем предполагать, что  $U$  — гильбертово пространство. Как было показано в гл. II, за приближенное решение задачи (1) в случае, когда  $\bar{z}$  принадлежит  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$  либо  $\check{\check{Z}} \downarrow_C$ , можно принять произвольный элемент  $z_\delta$  соответственно из  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$  либо  $\check{\check{Z}} \downarrow_C$ , для которого  $\|Az_\delta - u_\delta\| \leq \delta$ .

Каждое из множеств  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$ ,  $\check{\check{Z}} \downarrow_C$  представляет собой ограниченное, замкнутое, выпуклое множество в  $Z$ . Рассмотрим функционал

$$\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2, \quad (2)$$

определенный для всех  $z$ , принадлежащих соответственно  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$  или  $\check{\check{Z}} \downarrow_C$ . Поскольку оператор  $A$  линеен, то  $\Phi(z)$  — квадратичная функция  $z$ . Очевидно, что функционал  $\Phi(z)$  выпуклый и дифференцируемый, причем его производная Фреше [95] равна

$$\Phi'(z) = 2(A^*Az - A^*u_\delta). \quad (3)$$

Здесь  $A^*$ :  $U \rightarrow Z$  — оператор, сопряженный оператору  $A$ . Заметим, что

$$\|\Phi'(z_1) - \Phi'(z_2)\| = 2\|A^*A(z_1 - z_2)\| \leq 2\|A\|^2\|z_1 - z_2\|.$$

Таким образом, производная Фреше функционала  $\Phi(z)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L = 2\|A\|^2$ .

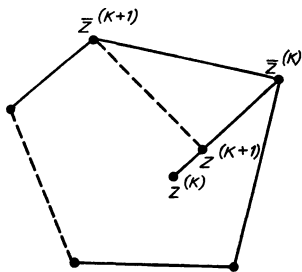
Задачу отыскания приближенного решения в нашем случае можно решить, минимизируя функционал  $\Phi(z)$  соответственно на множествах  $Z \downarrow_C$ ,  $Z_C$ ,  $Z \uparrow_C$ . При этом нет необходимости находить минимум  $\Phi(z)$  на этих множествах. Достаточно найти такой элемент  $z_\delta$  из указанных множеств, что  $\Phi(z_\delta) \leq \delta^2$ . Таким образом, для отыскания приближенного решения (1) на множествах  $Z \downarrow_C$ ,  $Z_C$ ,  $Z \uparrow_C$  необходимо научиться строить последовательность, минимизирующую некоторый выпуклый дифференцируемый функционал на замкнутом выпуклом ограниченном множестве в гильбертовом пространстве.

Если, как это имеет место в нашем случае, производная Фреше функционала удовлетворяет условию Липшица, то для решения этой задачи может быть использован, например, метод условного градиента [32, 33, 76, 208].

В методе условного градиента наряду с минимизирующей последовательностью  $z^{(k)}$ , начинающейся с произвольной допустимой точки  $z^{(0)} \in M^*$ , строится вспомогательная последовательность  $\bar{z}^{(k)}$  следующим образом. Пусть  $z^{(k)}$  построено, тогда  $\bar{z}^{(k)}$  является решением задачи

$$(\Phi'(z^{(k)}), \bar{z}^{(k)}) = \min_{z \in M} (\Phi'(z^{(k)}), z). \quad (4)$$

Эта задача разрешима, т.е. существует (вообще говоря, не единственная) точка  $\bar{z}^{(k)}$ , в которой линейный функционал  $(\Phi'(z^{(k)}), z)$  достигает своего минимального значения на множестве  $M$  [27]. Ясно, что  $\bar{z}^{(k)}$  принадлежит границе множества  $M$  (рис. 3.1). Заметим, что особенно просто задача (4) решается, если  $M$  — ограниченный замкнутый выпуклый многогранник в  $R^n$ . Тогда задача (4) — задача линейного программирования. ко-



Р и с. 3.1. К выводу формулы (4)

торая решается симплекс-методом [25, 28], а в случае, когда вершины многогранника  $M$  известны, просто перебором всех его вершин.

Пусть  $\bar{z}^{(k)}$  найдена. Далее  $z^{(k+1)}$  строится по формуле

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \lambda_k (\bar{z}^{(k)} - z^{(k)}),$$

где  $\lambda_k \in [0, 1]$  является решением одномерной задачи минимизации

$$\begin{aligned} \Phi(z^{(k+1)}) &= \Phi(z^{(k)} + \lambda_k (\bar{z}^{(k)} - z^{(k)})) = \\ &= \min_{\lambda \in [0, 1]} \Phi(z^{(k)} + \lambda (\bar{z}^{(k)} - z^{(k)})). \end{aligned} \quad (5)$$

\*) Допустимая точка — произвольный элемент  $z \in M$ . Так как все множества  $Z \downarrow_C$ ,  $Z_C$ ,  $Z \uparrow_C$  содержат 0, то в качестве допустимой точки можно взять  $z^{(0)} = 0$ .

Последняя задача — задача минимизации  $\Phi(z)$  на отрезке  $[z^{(k)}, \bar{z}^{(k)}]$ . Поскольку множество  $M$  выпукло, то  $z^{(k+1)} \in M$ . Таким образом, начав итерационный процесс с  $z^{(0)} \in M$ , в процессе минимизации мы не можем выйти за пределы множества  $M$ .

Если  $\Phi(z)$  — квадратичная функция (это имеет место в случае, когда оператор  $A$  линейен), то задача (5) тривиальна: найти минимум параболы по  $\lambda$  на отрезке  $[0, 1]$ . Если оператор  $A$  линейен, то построенная последовательность  $z^{(k)}$  является минимизирующей для функционала  $\Phi(z)$  на множестве  $M$  [28].

Таким образом, поскольку в нашем случае  $\Phi(z)$  — квадратичная функция и задача (5) решается тривиально, то для построения эффективных алгоритмов приближенного решения некорректно поставленной задачи (1) на множествах  $Z \downarrow_C, \check{Z}_C, \check{Z} \downarrow_C$  достаточно научиться эффективно решать задачу (4). В § 3 гл. II мы просто вычислили вершины многогранников  $M \downarrow_C, \check{M} \downarrow_C, \check{M}_C, \check{M}'_{2C}$ , в которые переходят множества  $Z \downarrow_C, \check{Z} \downarrow_C, \check{Z}_C$  при конечно-разностной аппроксимации. Теперь задача (4) может быть просто решена перебором вершин указанных многогранников. При этом решении задачи (1) на множестве выпуклых функций  $\check{Z}_C$  многогранник  $\check{M}_C$  можно заменить на многогранник  $\check{M}'_{2C}$  (см. замечание к теореме 6 гл. II). Последний многогранник имеет  $n + 1$  вершину и решение задачи (4) также не составляет труда. Итак, задача линейного программирования (4) решается на каждой итерации за  $n$  шагов перебором вершин указанных многогранников.

**З а м е ч а н и е.** Рассмотрим случай, когда оператор  $A$  задан приближенно. Пусть точное решение задачи (1) принадлежит одному из множеств  $Z \downarrow_C, \check{Z}_C$  или  $\check{Z} \downarrow_C$ . В этом случае (см. гл. II) за приближенное решение можно принять произвольный элемент  $z_\eta$  соответственно из  $Z \downarrow_C, \check{Z}_C$  или  $\check{Z} \downarrow_C$ , для которого  $\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leq \psi(h, \|z_\eta\|) + \delta$ , а если операторы  $A, A_h$  линейны, то  $\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leq h \|z_\eta\| + \delta$ . Очевидно, что в последнем неравенстве норму  $z_\eta$  можно заменить ее оценкой сверху постоянной  $C_0 = \sup \|z\|$  соответственно на множествах  $Z \downarrow_C, \check{Z}_C$  или  $\check{Z} \downarrow_C$ . В качестве  $C_0$  можно принять, например,  $C(b - a)^{1/2}$ . После этого алгоритмы отыскания приближенного решения некорректно поставленной задачи (1) на множествах  $Z \downarrow_C, \check{Z}_C$  или  $\check{Z} \downarrow_C$  строятся так же, как и в случае, когда оператор известен точно.

Проиллюстрируем возможности методов типа условного градиента на специальных множествах. Будем, как и прежде, в качестве модельной задачи рассматривать интегральное уравнение

$$\int_0^1 K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad -2 \leq x \leq 2, \quad (6)$$

с ядром

$$K(x, s) = \frac{1}{1 + 100(x - s)^2}.$$

На рис. 3.2 приведены результаты расчета для уравнения (6) на множестве монотонно убывающих функций. За точное решение уравнения

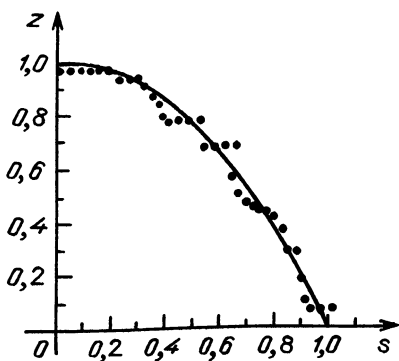


Рис. 3.2.

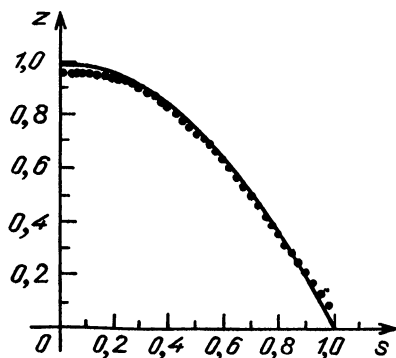


Рис. 3.3

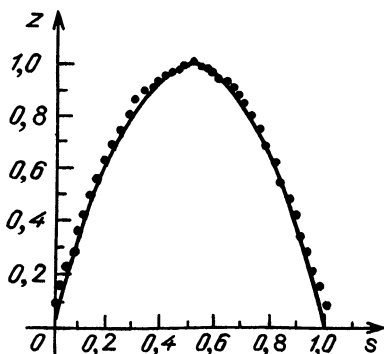


Рис. 3.4.

(6) берется  $\bar{z}(s) = 1 - s^2$ , правая часть (6) возмущается случайной погрешностью, равномерно распределенной на отрезке  $[-\delta_0, \delta_0]$ , где  $\delta_0$  составляет 1 % от максимума значений правой части. При этом среднеквадратичная погрешность соответствует значению  $\delta^2 = 7,36 \cdot 10^{-6}$ . Точное решение и найденное после 400 итераций приближенное решение изображено на рис. 3.2\*). Полученное приближенное решение соответствует значению функционала невязки  $\Phi(z) = 7,97 \cdot 10^{-6}$ . Дальнейшее применение метода условного градиента мало изменяет невязку и решение. Использовалось начальное приближение  $z^{(0)}(s) = 0$ .

На рис. 3.3 приведены результаты расчета той же модельной задачи (6) на множестве монотонных выпуклых функций. Точное решение  $\bar{z}(s) = 1 - s^2$ . Уровень возмущения входных данных составляет 3 % от максимума правой части. Полученное при этом приближенное решение соответствует значению невязки  $6,62 \cdot 10^{-5}$  и получено после 50 итераций метода условного градиента. Начальное приближение  $z^{(0)}(s) = 0$ .

\*) На рис. 3.2–3.12 точкам соответствует приближенное решение, сплошной линии – точное решение.

Возможности метода условного градиента демонстрирует и рис. 3.4. Здесь задача (6) решается на множестве выпуклых функций. Точное решение  $\bar{z}(s) = 4s(1-s)$ , правая часть возмущена таким образом, что  $\delta^2 = 8,22 \cdot 10^{-6}$ . Приближенное решение, полученное после 800 итераций метода условного градиента, соответствует значению невязки  $9,31 \cdot 10^{-6}$ , что составляет примерно 1 % от максимума правой части.

Метод условного градиента может быть использован также для построения приближенных решений задачи (1) на множестве функций ограниченной вариации  $V$ . В § 5 гл. II было показано, что за приближенное решение задачи (1) в случае, когда точное решение есть непрерывная функция ограниченной вариации, можно взять произвольный элемент  $z_\eta$ , реализующий минимум  $V_a^b(z)$  на множестве  $V(\eta)$ . Будем для простоты считать оператор  $A$  линейным и известным точно ( $h = 0$ ). Тогда за приближенное решение задачи (1) принимаем такой элемент  $z_\delta$ , что

$$V_a^b(z_\delta) = \min_{z \in V(\eta)} V_a^b(z) = \bar{m}.$$

Будем решать эту задачу следующим образом. Пусть  $C$  такая произвольная константа, что  $C \geq \bar{m}$ . Поставим следующую задачу. На множестве функций  $V_C = \{z: V_a^b(z) \leq C\}$ , вариации которых не превосходят  $C$ , найти такой элемент  $z_C$ , что  $\|Az_C - u_\delta\| \leq \delta^*$ . Эту задачу можно решать, минимизируя функционал невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  на множестве функций  $z \in V_C$ . При этом минимизацию нужно продолжать до тех пор, пока  $\Phi(z)$  не окажется меньшим либо равным  $\delta^2$ . Ниже будут предложены эффективные численные алгоритмы решения некорректной задачи на множестве  $V_C$ .

Теперь остается найти наименьшее значение  $C$ , для которого выполнено условие

$$\min_{z \in V_C} \Phi(z) \leq \delta^2,$$

т.е. задача нахождения  $z_C$  разрешима. Приближенно эту задачу можно решать простым перебором (уменьшая  $C$ ) на выбранной сетке значений параметра  $C$ .

Таким образом, мы пришли к следующей задаче: построить последовательность, минимизирующую квадратичный функционал  $\Phi(z)$  на множестве функций, вариация которых не превосходит заданного значения  $C$ . После перехода к конечно-разностной аппроксимации возникает задача: построить последовательность векторов  $z^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ , минимизирующую квадратичную функцию  $\varphi(z)$  на множестве  $M_{V_C}$  векторов  $z \in \mathbb{R}^n$ , компоненты которых удовлетворяют неравенству

$$|z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \dots + |z_n - z_{n-1}| \leq C.$$

Предположим для простоты, что известно одно из граничных значений  $\bar{z}(a)$  или  $\bar{z}(b)$ . Не уменьшая общности, будем считать, что  $\bar{z}(b) = 0$ . Тогда естественно положить  $z_n = 0$ .

---

\*) Последняя задача имеет самостоятельный интерес, так как множество  $V_C$  является компактом в  $L_p$ ,  $p > 1$ . Таким образом, приближенное решение, полученное на множестве корректности  $V_C$ , сходится к точному решению задачи  $\bar{z}$  в  $L_p$ ,  $p > 1$ .

Рассмотрим более подробно вопрос о том, что представляет собой множество  $M_{V_C}$  векторов из  $\mathbf{R}^n$ , для компонент которых выполнены соотношения

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \dots + |z_n - z_{n-1}| &\leq C, \\ z_n &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это делалось в § 3 гл. II, покажем, что множество  $M_{V_C}$  — выпуклый многогранник в  $\mathbf{R}^n$ , имеющий  $2(n-1)$  вершин. Предварительно докажем лемму. Пусть в  $\mathbf{R}^n$  заданы векторы  $T^{(j)}$  ( $j = -(n-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, n-1$ ) с компонентами

$$\begin{aligned} T_i^{(j)} &= \begin{cases} C, & i \leq j, \\ 0, & i > j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ T^{(-j)} &= -T^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (7)$$

**Л е м м а 1.** Векторы  $T^{(j)}$  ( $j = -(n-1), \dots, -1, 1, \dots, n-1$ ) выпукло независимы.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим противное. Пусть для некоторого  $k$  (не ограничивая общности, можно считать, что  $k > 0$ )

$$\begin{aligned} T^{(k)} &= \sum_{\substack{j=-(n-1) \\ j \neq k, 0}}^{n-1} a_j T^{(j)}, \\ a_j &\geq 0, \quad \sum_{\substack{j=-(n-1) \\ j \neq k, 0}}^{n-1} a_j = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть  $\delta_k$  — оператор из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}$ , введенный в § 3 гл. II,  $\delta_k u = u_{k+1} - u_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ). Подействовав оператором  $\delta_k$  на (8), получим

$$\delta_k T^{(k)} = \sum_{\substack{j=-(n-1) \\ j \neq k, 0}}^{n-1} a_j \delta_k T^{(j)} = a_{-k} \delta_k T^{(-k)}.$$

Поскольку  $\delta_k T^{(k)} = -\delta_k T^{(-k)} \neq 0$ , то из последнего равенства следует, что  $a_{-k} < 0$ . Полученное противоречие доказывает лемму.

**Т е о р е м а 1.** Множество векторов  $M_{V_C}$  представляет собой выпуклый многогранник в  $\mathbf{R}^n$ , вершины которого  $T^{(j)}$  ( $j = -(n-1), \dots, -1, 1, \dots, n-1$ ) имеют вид (7).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку выпуклая независимость векторов  $T^{(j)}$  доказана в лемме 1, достаточно показать, что произвольный вектор  $z \in M_{V_C}$  можно представить в виде выпуклой комбинации  $T^{(j)}$ , т.е.

$$z = \sum_{\substack{j=-(n-1) \\ j \neq 0}}^{n-1} a_j T^{(j)},$$

причем

$$a_j \geq 0, \quad \sum_{\substack{j=-\binom{n-1}{j \neq 0}}}^{n-1} a_j = 1.$$

Покажем, что такие  $a_j$  существуют. Действуя на разложение  $z$  по  $T^{(j)}$  оператором  $\delta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ), получим

$$\delta_k z = \sum_{\substack{j=-\binom{n-1}{j \neq 0}}}^{n-1} a_j \delta_k T^{(j)} = a_k \delta_k T^{(k)} + a_{-k} \delta_k T^{(-k)}.$$

Выберем  $a_k$  по следующему правилу: если  $\delta_k z \geq 0$ , то

$$a_k = 0, \quad a_{-k} = \frac{\delta_k z}{\delta_k T^{(-k)}} = \frac{\delta_k z}{C} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1;$$

если же  $\delta_k z \leq 0$ , то

$$a_k = \frac{\delta_k z}{\delta_k T^{(k)}} = \frac{\delta_k z}{-C} \geq 0, \quad a_{-k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Легко убедиться в том, что построенные  $a_j$  являются коэффициентами разложения  $z$  по  $T^{(j)}$ . При этом, если  $z \in M_{VC}$ , то

$$a_j > 0, \quad \sum_{\substack{j=-\binom{n-1}{j \neq 0}}}^{n-1} a_j = \frac{|z_2 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n-1}|}{C} \leq 1.$$

Если эта сумма равна единице, то теорема доказана. Пусть

$$\sum_{\substack{j=-\binom{n-1}{j \neq 0}}}^{n-1} a_j = \gamma < 1.$$

В этом случае вместо  $a_1, a_{-1}$  достаточно взять

$$a_1^1 = a_1 + (1 - \gamma)/2, \quad a_{-1}^1 = a_{-1} + (1 - \gamma)/2.$$

Теперь задача построения последовательности, минимизирующей функционал  $\Phi(z)$  на множестве  $V_C$  функций, вариации которых не превосходят  $C$ , легко решается методом условного градиента. (Эта задача, как отмечалось, представляет самостоятельный интерес для приложений.)

Рис. 3.5 демонстрирует возможности условного градиента для решения задач на множестве функций, вариация которых не превосходит заданной константы.

Точное решение задачи (6).

$$\bar{z}(s) = (e^{-(s-0,3)^2/0,03} + e^{-(s-0,7)^2/0,03}) 0,9550408 - 0,052130913.$$

Правую часть уравнения (6) возьмем равномерно распределенной случайной погрешностью таким образом, что  $\delta^2 = 5,56 \cdot 10^{-6}$ . Приближенное решение  $z(s)$  получено после 800 итераций. Значение функционала невязки  $\Phi(z) = 2,27 \cdot 10^{-5}$ , что соответствует примерно 1,5% от максимума правой части. Использовалось начальное приближение  $z^{(0)}(s) = 0$ .

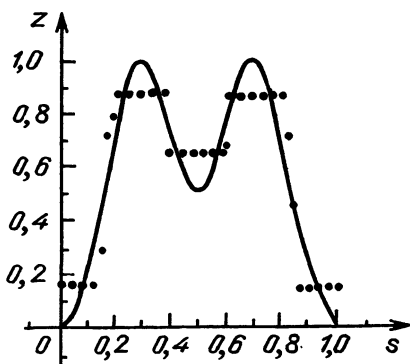


Рис. 3.5.

Таким образом, показано, что все методы, предложенные в § 2, 5 гл. II для решения некорректно поставленных задач на множествах специальной структуры, легко реализуются методом условного градиента, поскольку в каждом случае, переходя к конечно-разностной аппроксимации, мы приходим к задаче минимизации квадратичного функционала (оператор  $A$  линеен) на множестве, которое представляет собой выпуклый многогранник в  $R^n$ , вершины которого удастся найти в явном виде. После этого алгоритмы

решения задачи элементарно реализуются. В § 2 гл. IV приведем описание программ, реализующих эти алгоритмы.

**З а м е ч а н и я.** 1. Заметим, что даже в случае, когда оператор известен точно, при переходе к конечно-разностной аппроксимации мы заменяем оператор  $A$  на некоторый конечномерный оператор  $A_h$ . В этом случае необходимо контролировать погрешность аппроксимации (выбором количества узлов сетки) так, чтобы выполнялось соотношение  $hC_0 \ll \delta$ .

2. Сложности, возникающие при попытке перенести результаты настоящей главы на случай нелинейного оператора  $A$ , хорошо известны и связаны с тем, что при этом функционал  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  может уже не являться выпуклым. Поэтому гарантировать сходимость итерационных алгоритмов с произвольного допустимого начального приближения невозможно.

## § 2. Применение метода проекций сопряженных градиентов для решения некорректно поставленных задач на множествах специальной структуры

В предыдущем параграфе были предложены алгоритмы приближенного решения некорректных задач на специальных множествах, основанные на методе условного градиента. Эти методы нашли широкое применение для решения целого ряда практических задач. Однако, как показала практика, указанные итерационные алгоритмы являются действительно эффективными лишь при относительно невысокой точности задания входной информации (приблизительно несколько процентов). В случае, когда требуется достигнуть меньших значений функционала невязки  $\Phi(z)$  (более высокая точность задания входной информации), время счета резко возрастает. С другой стороны, в настоящее время точность задания входной информации в некоторых обратных задачах физики [71] составляет доли процента, и это еще не является пределом. Поэтому возникла необходимость создания высокоэффективных алгоритмов решения некорректно поставленных задач с ограничениями. Ряд интересных алгоритмов решения некорректных задач на специальных множествах предложен в работах [48, 141, 149, 150].



В § 2, 3 этой главы будут предложены эффективные алгоритмы решения некорректных задач на специальных множествах, решающие задачу построения приближенного решения за конечное число шагов.

Пусть точное решение задачи (1) принадлежит одному из множеств  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$  или  $\check{Z} \downarrow_C$ . Будем для простоты считать, что оператор  $A$  известен точно и линеен. За приближенное решение, как мы убедились, можно принять такой произвольный элемент  $z_\delta$ , принадлежащий соответственно  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}_C$  или  $\check{Z} \downarrow_C$ , что  $\|Az - u_\delta\| \leq \delta$ . Как было показано в гл. II, в случае, когда  $\bar{z}(s) \in \check{Z}_C$  или  $\check{Z} \downarrow_C$ , приближенное решение можно искать соответственно на множествах  $\check{Z}$  или  $\check{Z} \downarrow$ , т.е. отказаться от равномерной ограниченности функций константой  $C$  (см. теорему 7 гл. II). При конечно-разностной аппроксимации множества  $Z \downarrow_C$ ,  $\check{Z}$ ,  $\check{Z} \downarrow$  переходят в выпуклые множества

$$M \downarrow_C = \left\{ z: \begin{array}{l} z_{i+1} - z_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 \leq z_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}, \quad (9)$$

$$\check{M} = \left\{ z: \begin{array}{l} z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}, \quad (10)$$

$$\check{M} \downarrow = \left\{ z: \begin{array}{l} z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ z_{i+1} - z_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}. \quad (11)$$

Функционал  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  переходит в квадратичную функцию  $\varphi(z)$ . Таким образом, приходим к следующей задаче: построить минимизирующую последовательность для функционала  $\Phi(z)$  на одном из множеств (9)–(11).

Пусть  $Y$  — одно из множеств  $M \downarrow_C$ ,  $\check{M}$  или  $\check{M} \downarrow$ . Заметим, что любое ограничение (9)–(11) может быть записано в виде

$$Fz \leq g, \quad (12)$$

где  $F$  — матрица размера  $m_0 \times n$ ,  $m_0$  — количество условий, определяющих множество,  $g$  — вектор ограничений длины  $m_0$ . Неравенство понимается в смысле покомпонентных неравенств.

Если  $z$  находится на границе множества, то одно или несколько неравенств в (12) могут обращаться в равенства. Множеством активных ограничений  $I(z)$  (в точке  $z$ ) будем называть множество индексов (быть может, не всех), для которых в точке  $z$  выполнены равенства

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} z_j = g_i.$$

Через  $\dim I$  будем обозначать число элементов в множестве  $I$ . Назовем матрицей активных элементов матрицу  $F_I$  размера  $\dim I \times n$ , строками которой являются строки матрицы  $F$ , номера которых принадлежат  $I(z)$ .

Квадратичную функцию  $\varphi(z)$  представим в виде

$$\varphi(z) = (z, Qz) + (d, z) + e. \quad (13)$$

Метод проекции сопряженных градиентов для минимизации функции (13) при ограничениях (12) проще всего записывается в алгоритмическом виде [145, 146].

*Шаг 1.* Минимизация начинается с произвольной допустимой точки  $z^{(0)} \in Y$  и проводится в  $R^n$  методом сопряженных градиентов. Положим число активных ограничений  $m := 0$ . Положим счетчик итераций метода проекции сопряженных градиентов без изменения матрицы активных ограничений  $k := 0$ .

*Шаг 1.1.* Поскольку метод сопряженных градиентов находит минимум в  $R^n$  за  $n$  шагов, если  $k = n$ , то решение найдено. В этом случае переходим на шаг 6.

*Шаг 1.2.* Вычисляется направление спуска  $p^{(k)}$ : если  $k = 0$ , то

$$p^{(k)} = -\text{grad } \varphi(z^{(k)}),$$

иначе

$$p^{(k)} = -\text{grad } \varphi|_{z=z^{(k)}} + \frac{\|\text{grad } \varphi(z^{(k)})\|^2}{\|\text{grad } \varphi(z^{(k-1)})\|^2} p^{(k-1)}.$$

*Шаг 1.3.* Вычисляется  $a_k$  — величина оптимального шага вдоль этого направления по формуле

$$a_k = \frac{1}{2} \frac{(\text{grad } \varphi(z^{(k)}), p^{(k)})}{(Qp^{(k)}, p^{(k)})}.$$

*Шаг 1.4.* Вычисляется  $a_{\max}$  — величина максимально возможного шага вдоль этого направления  $p^{(k)}$ , не выводящего за пределы множества  $Y$ .

*Шаг 1.5.* Если  $a_k \leq a_{\max}$ , то  $z^{(k+1)} := z^{(k)} + a_k p^{(k)}$ ,  $k := k + 1$  и переходим на шаг 1.1; иначе  $z^{(k+1)} := z^{(k)} + a_{\max} p^{(k)}$  и переходим на шаг 2.

*Шаг 2.* Появились новые активные ограничения. Находим одно из новых активных ограничений и включаем его в множество активных ограничений  $I(z)$ . В соответствии с этим изменяем матрицу активных ограничений;  $m := m + 1$ .

*Шаг 3.* Вычисляем проектор  $P_I$  на подпространство  $R^{n-m}$ , определяемое условиями  $F_I z = 0$ , по формуле

$$P_I = E - F_I^* (F_I F_I^*)^{-1} F_I.$$

*Шаг 4.* Повторяем шаг 1, только в качестве начальной точки берется  $z^{(k)}$ , а всюду вместо  $\text{grad } \varphi(z^{(k)})$  берутся их проекции  $P_I \text{grad } \varphi(z^{(k)})$ . Точный минимум на  $(n - m)$ -мерном линейном многообразии находится методом сопряженных градиентов за  $n - m$  шагов. Поэтому выход из шага 4 проводится по сравнению  $k = n - m$ .

Если минимум на многообразии найден и  $m = 0$ , то переходим на шаг 6. Если минимум найден и  $m \neq 0$ , то переходим на шаг 5. Если минимум не найден (т.е.  $a_k > a_{\max}$ ), то переходим на шаг 2.

*Шаг 5.* Сюда мы попадаем лишь в том случае, если на соответствующем многообразии найден точный минимум. Дальнейшее перемещение в этом многообразии или в более узких, получаемых добавлением новых ограничений не позволяет уменьшить значение  $\varphi(z)$ . Необходимо выбросить одно из ограничений так, чтобы при движении по направлению, ставшему теперь возможным, функционал  $\varphi(z)$  убывал, а точка не выходила за пределы допустимого множества  $Y$ . Для этого поступим следующим образом.

*Шаг 5.1.* Вычисляем набор из  $m$  теневых параметров по формуле

$$u^0 = (F_I F_I^*)^{-1} F_I \text{grad } \varphi.$$

*Шаг 5.2.* Если все  $u_i^0 \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), то найдено решение задачи (ни одного ограничения нельзя выбросить из множества активных ограничений). Переходим на шаг 6.

*Шаг 5.3.* Если  $u_i^0 < 0$  для каждого  $i$ , то  $i$ -е активное ограничение исключаем из  $I(z)$  и переходим на шаг 3, положив  $m := m - 1$ .

*Шаг 6.* Конец.

Как видно из алгоритма, при каждом переходе к новому подпространству необходимо вычислять оператор проектирования  $P_I$ , а для этого в алгоритме необходимо обращать матрицу  $F_I F_I^*$ . Та же проблема возникает при вычислении теневых параметров  $u^0$ . Очевидно, что это возможно лишь в случае, когда строки матрицы  $F_I$  линейно независимы. Приведенный алгоритм в случае, если строки матрицы активных ограничений независимы, решает задачу минимизации квадратичной функции  $\varphi(z)$  на множестве (12) за конечное число шагов [145, 146].

Проверим, являются ли независимыми ограничения, определяющие множества  $M \downarrow_C$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{M} \downarrow$ . Рассмотрим сначала многогранники  $\tilde{M}$  и  $\tilde{M} \downarrow$ . Нетрудно убедиться в том, что ряд ограничений, определяющих множества  $\tilde{M}$ , можно отбросить. Очевидно, что из условий  $z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ) и условий  $z_1 \geq 0$ ,  $z_n \geq 0$  следуют неравенства  $z_i \geq 0$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ). Таким образом, множество  $\tilde{M}$  можно задавать совокупностью  $n$  условий:

$$\tilde{M} = \left\{ \begin{array}{l} z_1 \geq 0 \\ z: z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ z_n \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (14)$$

Аналогично,

$$\tilde{M} \downarrow = \left\{ \begin{array}{l} z_1 \geq z_2 \\ z: z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ z_n \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (15)$$

В обоих случаях все оставшиеся условия линейно независимы, поэтому во всех матрицах  $F_I$ , которые могут появиться при реализации метода проекции сопряженных градиентов, строки также будут линейно независимы.

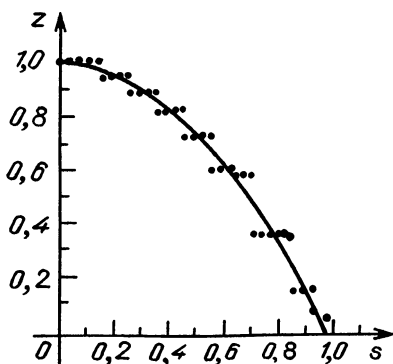


Рис. 3.6

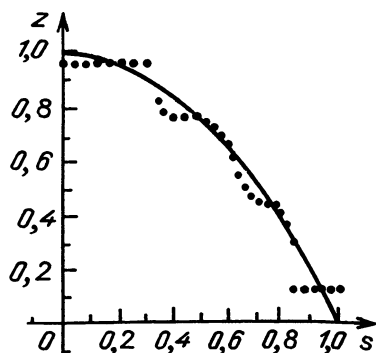


Рис. 3.7

Для случая, когда решение задачи ищется на множестве  $M \downarrow_C$ , мы имеем  $n + 1$  ограничение:

$$M \downarrow_C = \left\{ \begin{array}{l} z_1 \leq C \\ z: z_i \geq z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \\ z_n \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (16)$$

Однако нетрудно показать, что для любой выборки  $k$  ограничений,  $k \leq n$ , строки матрицы активных ограничений будут линейно независимы. Все  $n + 1$  ограничений одновременно не могут быть активными, поскольку это приводит к равенству  $C = 0$ .

Таким образом, после указанных изменений в ограничениях, определяющих множества  $M \downarrow_C$ ,  $\bar{M}$ ,  $\check{M} \downarrow$ , задачу построения последовательности, минимизирующей  $\varphi(z)$  на одном из указанных множеств, можно решать методом проекции сопряженных градиентов. В § 4 гл. IV приведено описание программы, реализующей описанный алгоритм.

Проиллюстрируем возможности метода проекции сопряженных градиентов решением модельных задач.

На рис. 3.6 приведены точное и приближенное решения модельной задачи (6) с использованием априорной информации о монотонном убывании искомой функции и ее ограниченности сверху константой  $C = 1$ . Точное решение  $\bar{z}(s) = 1 - s^2$ . Задача решалась с точной входной информацией  $\delta = 0$ . Полученное приближенное решение соответствует значению невязки  $\Phi(z) = 9,28 \cdot 10^{-12}$ . В качестве начального приближения использовалась функция  $z^{(0)}(s) = 0,5$ . Для решения задачи потребовалось 15 минут времени центрального процессора на БЭСМ-6. Было сделано 100 больших циклов.

Задача (6) с точным решением  $\bar{z}(s) = 1 - s^2$ , но правой частью, возмущенной случайной погрешностью таким образом, что  $\delta^2 = 6,63 \cdot 10^{-5}$ , имеет приближенное решение, изображенное на рис. 3.7. Это решение соответствует значению функционала невязки  $\Phi(z) = 6,62 \cdot 10^{-5}$ , т.е. примерно 3 % по отношению к максимуму правой части. Для получения решения потребовалось 23 больших цикла.

**§ 3. Применение метода проекций сопряженных градиентов с проецированием на множество векторов с неотрицательными компонентами для решения некорректно поставленных задач на множествах специальной структуры**

Вернемся к задаче отыскания приближенного решения некорректно поставленной задачи (1) на множествах  $Z \downarrow, \check{Z}, \check{Z} \downarrow$ . В § 2 был предложен алгоритм построения приближенного решения задачи (1) для линейного оператора  $A$  за конечное число шагов. Однако при реализации этого алгоритма необходимо обращать матрицу  $F_I F_I^*$ , что при достаточно большом числе активных ограничений приводит к значительным затратам машинного времени. В настоящем параграфе предложен алгоритм, основанный на методе проекции сопряженных градиентов с проецированием на множество векторов с неотрицательными компонентами. В этом случае проектор вычисляется элементарно.

Рассмотрим сначала задачу построения минимизирующей последовательности для квадратичного функционала  $\varphi(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ , на одном из множеств  $\check{M}$  или  $\check{M} \downarrow$ . Докажем предварительно ряд утверждений.

Пусть  $Y$  — одно из множеств  $\check{M}$  или  $\check{M} \downarrow$ ,  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) — соответственно вершины выпуклых ограниченных многогранников  $\check{M}'_C, \check{M} \downarrow_C$  (см. § 3 гл. II).

**Л е м м а 2.** Пусть  $z \in Y$ . Тогда справедливо единственное представление

$$z = \sum_{j=1}^n a_j T^{(j)},$$

причем  $a_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Справедливость леммы следует из линейной независимости векторов  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Неотрицательность коэффициентов  $a_j$  следует из явного вида коэффициентов  $a_j$  (см. § 3 гл. II).

Рассмотрим оператор  $T$  из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ , определенный по формуле

$$Tx = \sum_{j=1}^n x_j T^{(j)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку  $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) образуют базис в  $\mathbb{R}^n$ , то существует обратный оператор  $T^{-1}$ , определенный на всем  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим множество векторов  $\Pi^+ \subset \mathbb{R}^n$ , имеющих все неотрицательные координаты:  $x \in \Pi^+$ , если  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Очевидно, что  $T\Pi^+ = Y$  и  $T^{-1}Y = \Pi^+$ . Рассмотрим теперь функцию  $f(x) = \varphi(Tx)$ , определенную на множестве  $\Pi^+$ . Тогда вместо задачи минимизации  $\varphi(z)$  на  $Y$  можно решать задачу минимизации  $f(x)$  на  $\Pi^+$ , поскольку между  $Y$  и  $\Pi^+$  оператор  $T^{-1}$  осуществляет взаимно однозначное соответствие.

В силу линейности оператора  $T$  функция  $f(x)$  — квадратичная, так же как и функция  $\varphi(z)$ . Таким образом, задача отыскания приближенного решения некорректно поставленной задачи (1) на множествах  $\check{Z}$  и  $\check{Z} \downarrow$  сводится к построению последовательности, минимизирующей квадратич-

ную функцию  $f(z)$  на множестве векторов с неотрицательными компонентами.

Аналогично можно решать задачу построения приближенного решения (1) на множестве монотонных функций, если отказаться от ограниченности сверху константой  $C$  функций из множества  $Z \downarrow_C$ .

Рассмотрим

$$M \downarrow = \left\{ z: z \in \mathbb{R}^n, \begin{array}{l} z_{i+1} - z_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}.$$

Легко убедиться, что и в этом случае оператор  $T$  взаимно однозначно отображает  $\Pi^+$  на  $M \downarrow$  ( $T^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — вершины выпуклого ограниченного многогранника  $M \downarrow_C$  — определяются формулами (7)\*).

Остается заметить, что метод проекции сопряженных градиентов в  $\Pi^+$  сравнительно легко реализуем [146], поскольку проектор на  $\Pi^+$  строится тривиально. Напомним, что нам необходимо найти такой элемент  $x_\delta \in \Pi^+$ , что  $f(x_\delta) \leq \delta^2$ . Приближенное решение  $z_\delta$  задачи (1) находится после этого по формуле  $z_\delta = Tx_\delta$ .

Описанный в настоящем параграфе метод предложен в работах [65, 67], в § 5 гл. IV мы опишем его программную реализацию.

Проиллюстрируем возможности метода сопряженных градиентов с проектированием на множество векторов с неотрицательными компонентами.

В качестве модельной задачи рассматривалась задача (6). Точное решение  $\bar{z}(s) = 4s(1-s)$ . Использовалась априорная информация о выпуклости этого решения. Точность задания правой части принималась равной нулю. Полученное приближенное решение изображено на рис. 3.8 точками. Значение невязки  $\Phi(z) = 1,05 \cdot 10^{-14}$ , что соответствует относительной погрешности примерно  $5 \cdot 10^{-5} \%$  (по отношению к максимуму правой части). Всего для нахождения полученного решения потребовалось 42 итераций. В качестве начального приближения использовалась функция  $z^{(0)}(s) = 0$ .

На рис. 3.9 изображено приближенное решение задачи (6) с возмущенной правой частью. Величина возмущения выбиралась таким образом, чтобы  $\delta^2 = 7,40 \cdot 10^{-5}$ , что составляет 3 % от максимума правой части. Приближенное решение было получено после 2 итераций метода проекции сопряженных градиентов и соответствует значению невязки  $\Phi(z) = 7,29 \cdot 10^{-5}$ .

Получаемое при решении задачи (6) на множестве монотонно убывающих, выпуклых вверх функций с точным решением  $\bar{z}(s) = 1 - s^2$  (погрешность задания правой части равна нулю) приближенное решение изображено на рис. 3.10. Это решение соответствует "точному" минимуму (с точностью до накопления погрешностей округления в программе) функционала невязки  $\Phi(z)$ . Для нахождения этого решения потребовалось 224 итерации метода проекции сопряженных градиентов. Значение функционала невязки на

---

\*) Заметим, что в случае, когда точное решение  $\bar{z}$  — монотонная ограниченная функция, для доказательства сходимости приближений к точному решению существенна информация о равномерной ограниченности функций из  $Z \downarrow_C$ . Здесь мы эту информацию опускаем.

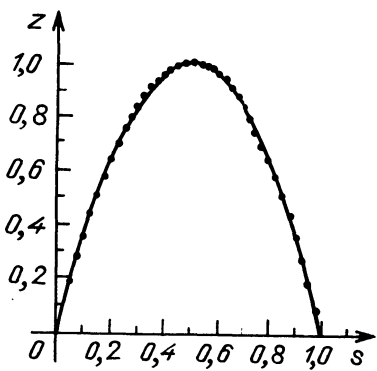


Рис. 3.8

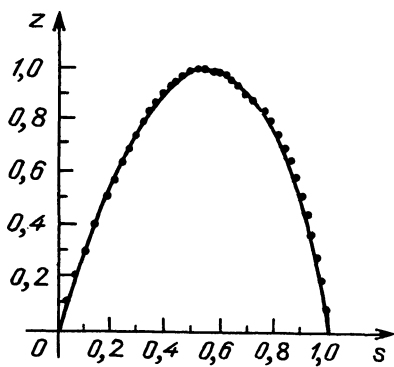


Рис. 3.9

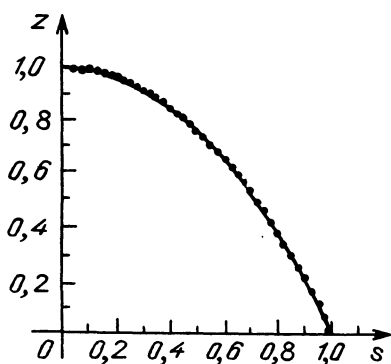


Рис. 3.10

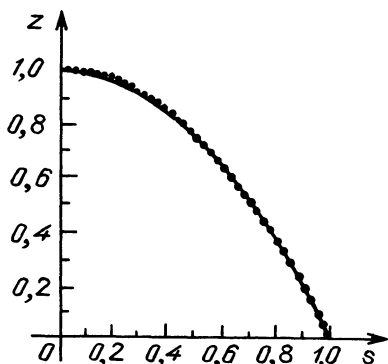


Рис. 3.11

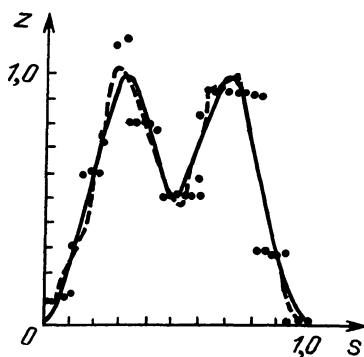


Рис. 3.12

на приближенном решении  $\Phi(z) = 1,69 \cdot 10^{-12}$ , что соответствует погрешности около 0,0005 % от максимума правой части. Начальное приближение  $z^{(0)}(s) = 0$ .

На рис. 3.11 точками изображено приближенное решение, получаемое при минимизации соответствующего функционала невязки на множестве монотонно невозрастающих неотрицательных функций. Значение невязки на этом решении составляет  $\Phi(z) = 3,37 \cdot 10^{-11}$ . Для нахождения этого решения потребовалось 42 итерации метода проекций сопряженных градиентов.

Таким образом, удается построить алгоритмы приближенного решения всех задач, поставленных в гл. II. Эффективность этих алгоритмов будет иллюстрироваться расчетами модельных задач в гл. IV.

Заметим, что, имея указанный комплекс алгоритмов, можно решать и более сложные задачи, когда об искомом решении известно, например, что оно имеет заданное количество экстремумов и заданное количество точек перегиба. Обозначим последние  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Если их положение известно, то приведенные выше алгоритмы без труда модернизируются на этот случай (в промежутке между точками  $s_i$  искомая функция монотонна или соответственно выпукла). В приложениях приведена программа, эффективно решающая некорректные задачи типа (1) на множестве кусочно-монотонных (кусочно-выпуклых функций).

Задача существенно усложняется, если положение точек  $s_i$  неизвестно.

Высокая эффективность алгоритмов, основанных на методах типа сопряженных градиентов, позволяющих решать задачу при фиксированных  $s_i$  за несколько секунд, делает возможным решать задачу выбора  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) при небольших  $m$  простым перебором.

Представляются интересными алгоритмы, позволяющие вести целенаправленный перебор точек экстремумов и перегибов [155].

На рис. 3.12 представлены результаты расчета модельной задачи (6) на множестве кусочно-монотонных (кусочно-выпуклых) функций. В качестве начального решения в итерационном процессе задавалась функция, тождественно равная нулю.



## АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

В настоящей главе приводятся описания программ, реализующих основные алгоритмы, рассмотренные в книге. Описания программ снабжены примерами расчетов модельных задач. Эти примеры призваны служить двум целям. Во-первых, они должны иллюстрировать описания программ. Во-вторых, эти примеры должны убедить читателя, желающего воспользоваться нашими программами, что программы правильно перенесены им на доступный вычислительной машине носитель. Модельные расчеты могут служить в этом случае тестом для такого контроля.

Имеет смысл сделать сначала несколько общих замечаний о структуре программ и о целях, вызвавших такую структуру. Задачи, рассмотренные в гл. I, II, сводятся в большинстве случаев к решению систем линейных уравнений, заданных в том или ином виде. Наиболее сложные и трудоемкие проблемы возникают именно на этой стадии. В соответствии с этим, ядром предлагаемого комплекса программ являются программы, реализующие различные алгоритмы решения, вообще говоря, плохо обусловленных систем линейных уравнений. Тем не менее, следует иметь в виду, что задачи решения систем уравнений являются в большинстве случаев производными — в процессе обработки различного рода экспериментальной информации, при решении задач синтеза или интерпретации возникают задачи другого уровня. Наиболее часто задачи такого типа приводят к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (1)$$

Для того чтобы облегчить использование комплекса программ для различных конкретных приложений, мы считаем целесообразным привести программы, специально предназначенные для решения интегральных уравнений (1). Однако наиболее интересными являются программы, реализующие решение плохо обусловленных систем линейных уравнений (в том числе при наличии априорных ограничений). В связи с этим, основное внимание уделяется именно этим программам, несмотря на то, что они, как правило, не являются главными. Мы предполагаем, что заинтересованный читатель сам без труда сможет скомпилировать из приведенных блоков любую необходимую ему конфигурацию, дополнив ее при необходимости любыми другими программами.

Все программы написаны на языке Фортран. Более того, возможности языка были сознательно ограничены. При написании программ на них на-

кладывались дополнительные требования, позволяющие включать программы практически в любые библиотеки стандартных программ на Фортране. В большинстве случаев эти требования не являются слишком обременительными и для их удовлетворения нет необходимости существенно усложнять программы. Все программы в достаточной степени прокомментированы.

Основные программы содержат среди параметров параметр — код завершения программы, характеризующий результат работы программы. Для удобства использования головных программ количество параметров в них мы стремились свести к минимуму, объединяя в один все рабочие массивы.

Тексты основных программ помещены в соответствующих приложениях. Кроме того, некоторые небольшие подпрограммы, использующиеся в различных алгоритмах, вынесены в отдельное приложение IX. Их список и назначение приведены ниже.

**Некоторые общие программы.** Достаточно подробные описания перечисленных ниже программ содержатся в комментариях:

PTICR0 — одномерная минимизация сглаживающего функционала;

PTICR $\emptyset$  — вычисление матрицы оператора;

PTICR1 — пересылка массивов;

PTIC12 — засылка целого числа в массив;

PTICR2 — засылка числа типа REAL в массив;

PTICR3 — умножение матрицы на вектор;

PTICR4 — вычисление градиента нормы  $\varphi(z) = \|Az - u_\delta\|_{\mathbf{R}^m}^2$ ;

PTICR5 — вычисление невязки  $\varphi(z)$ ;

PTICR6 — вычисление скалярного произведения векторов;

PTICR7 — вычисление взвешенного скалярного произведения;

PTICR8 — вычисление градиента стабилизатора;

PTICR9 — вычисление значения стабилизирующего функционала  $\|z\|_{W_2}^2$ .

В настоящую главу вынесены также результаты тестовых расчетов. Для большинства методов в качестве модельного уравнения использовалось уравнение (1) с ядром

$$K(x, s) = \frac{1}{1 + 100(x - s)^2} \quad (2)$$

и значениями  $a = 0, b = 1, c = -2, d = 2$ .

Значения правой части  $u(x)$  уравнения (1) на сетке  $\{x_i\}_{i=1}^m$  на отрезке  $[c, d]$  выбирались в соответствии со следующим правилом.

В качестве вектора  $u$  правой части использовался вектор, полученный умножением матрицы  $A$  размера  $m \times n$ , аппроксимирующей оператор в (1), на вектор-столбец  $\bar{z}$  значений точного решения на сетке  $\{s_i\}_{i=1}^n$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$u_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \bar{z}(s_j). \quad (3)$$

Такой способ выбора правой части гарантирует, что минимум функционала невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  на соответствующем множестве векторов будет равен нулю. Это свойство решения существенно при исследовании

свойств итерационных алгоритмов решения некорректно поставленных задач.

Остановимся на одном существенном факторе, характеризующем итерационные алгоритмы решения некорректно поставленных задач (это касается в первую очередь алгоритмов решения некорректно поставленных задач на компактных множествах). Общим свойством большинства итерационных алгоритмов является быстрое падение скорости минимизации при приближении к точке минимума функционала. Поэтому важной характеристикой итерационных алгоритмов является тот фактический минимальный уровень значений функционала невязки, до которого удается довести процесс минимизации за реальное время. Этот параметр позволяет заранее оценить ту погрешность задания входной информации, при которой имеет смысл применение данного метода. Или наоборот, по погрешностям входной информации выбрать алгоритм, наиболее пригодный для решения данной задачи. Так, если на модельных задачах мы за реальное время можем минимизировать функционал невязки до уровня  $\sim 1\%$  (по отношению к норме правой части), то ясно, что при помощи этого алгоритма, вообще говоря, бесполезно решать задачи, где погрешность задания входной информации составляет  $\sim 0,1\%$ . А именно, такие погрешности в задании входных данных характерны для некоторых высокочастотных астрофизических исследований.

Именно для того, чтобы исследовать уровень, до которого удается минимизировать невязку, и используются правые части уравнения (1), вычисленные в соответствии с (3).

Заметим, что описанные ниже программы решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода переходят к задаче для системы линейных уравнений (вообще говоря, плохо обусловленной), аппроксимируя интеграл в (1) по формуле трапеций на равномерной сетке  $\{s_j\}_{j=1}^n$  на отрезке  $[a, b]$  для каждого из значений аргумента  $x$  на сетке  $\{x_i\}_{i=1}^m$ , также равномерной. Матрица линейного оператора  $A$ , аппроксимирующего интегральный оператор в уравнении (1), выбирается при этом в виде

$$A_{ij} = \begin{cases} h_s K(x_i, s_j), & j = 2, 3, \dots, n-1, \\ \frac{h_s}{2} K(x_i, s_j), & j = 1, n, \end{cases} \quad (4)$$

где  $h_s = (b - a)/(n - 1)$  — шаг равномерной сетки  $\{s_j\}_{j=1}^n$  на  $[a, b]$ ,  $s_1 = a$ ,  $s_n = b$ .

При необходимости использовать более точные аппроксимационные формулы достаточно изменить лишь программу ПТИСР $\emptyset$ , осуществляющую переход к конечно-разностной задаче и формирующую элементы матрицы  $A$ .

При решении тестовых задач параметры выбирались таким образом, что погрешность аппроксимации задачи (1) системой линейных уравнений

$$\psi(z) = \left\{ h_x \sum_{i=1}^m \int_a^b K(x_i, s) z(s) ds - \sum_{j=1}^n A_{ij} z(s_j) \right\}^2, \quad (5)$$

где  $h_x = (d - c)/(m - 1)$  — шаг равномерной сетки по  $x$  на  $[c, d]$ ,  $x_1 = c$ ,

$x_m = d$ , на точном решении  $\psi(\bar{z})$  составляет  $\sim 10^{-4}$ . Это значение погрешности аппроксимации соответствует относительной погрешности  $\psi(\bar{z})/\|\bar{u}\|_{L_2} = 0,001$ .

Вообще говоря, при решении уравнения (1) всегда следует следить за тем, чтобы погрешность аппроксимации интеграла в (1) была значительно меньше погрешности задания правой части  $\delta$ . Для этого необходимо либо выбирать достаточно густые сетки, повышать размерность задачи, что вызывает существенное увеличение затрат машинного времени, либо использовать более точные квадратурные формулы (программа PTICR $\phi$ ). В противном случае погрешность аппроксимации должна учитываться путем рассмотрения задачи с приближенно заданным оператором.

### § 1. Описание программ решения некорректно поставленных задач методом регуляризации

В настоящем параграфе описаны программы PTIMR и PTIZR, реализующие метод регуляризации для решения интегрального уравнения Фредгольма (1), описанный в § 2, 5, 6 гл. 1. Оба рассматриваемых алгоритма используют выбор параметра регуляризации в соответствии с принципом обобщенной невязки (§ 2 гл. 1), т.е. находят параметр регуляризации из уравнения

$$\rho(\alpha) = \|A_h z^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z^\alpha\|)^2 - \mu_\eta^2(u_\delta, A_h) = 0.$$

В качестве стабилизирующего функционала используется стабилизатор первого порядка, т.е. используется  $Z = W_2^{\frac{1}{2}}[a, b]$ , и

$$\|z\|^2 = \int_a^b (|z(s)|^2 + |z'(s)|^2) ds.$$

Это позволяет гарантировать сходимость приближенных решений к точному в метрике пространства  $W_2^{\frac{1}{2}}[a, b]$ , а следовательно, и равномерную сходимость.

Для отыскания экстремали сглаживающего функционала  $M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha \|z\|^2$  при фиксированном значении параметра регуляризации  $\alpha$  программа PTIMR использует алгоритм многократного решения системы уравнений, аппроксимирующей уравнение Эйлера для функционала  $M^\alpha[z]$ :

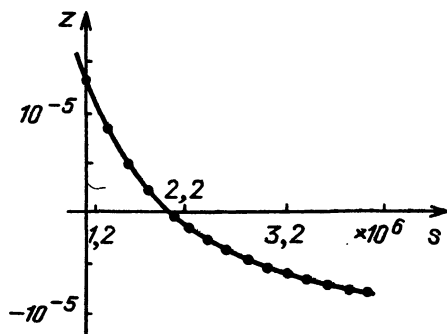
$$A^*Az + \alpha Cz = A^*u_\delta$$

( $A$  – матрица оператора, аппроксимирующего интегральный оператор в (1),  $(z, Cz)$  аппроксимирует норму  $\|z\|_{W_2^{\frac{1}{2}}}^2$ , см. § 6 гл. I), описанный в § 6 гл. I и основанный на приведении этой системы к трехдиагональному виду.

Программа PTIZR для минимизации функционала  $M^\alpha[z]$  использует метод сопряженных градиентов. Эта программа является, вообще говоря, менее быстродействующей по сравнению с PTIMR.

Отметим, что поскольку  $\|A\|_{W'_2 \rightarrow L_2} \leq \|A\|_{L_2 \rightarrow L_2}$ , то в качестве меры погрешности задания оператора  $A$  можно использовать такую оценку  $h \geq \|A - A_h\|_{L_2 \rightarrow L_2}$ , что  $h \rightarrow 0$ .

Для отыскания корня обобщенной невязки  $\rho(\alpha)$  обе программы используют некоторую модификацию метода хорд. А именно, заметим, что в случае  $h = 0$  (точно заданный оператор) функция  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$  является монотонно убывающей и выпуклой. На рис. 4.1 изображена



Р и с. 4.1

зависимость обобщенной невязки  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$  от величины, обратной параметру регуляризации, для уравнения (1) с ядром (2) при

$$\bar{z}(s) = \left( \exp \left\{ -\frac{(s-0,3)^2}{0,03} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(s-0,7)^2}{0,03} \right\} \right) / 0,9550408 - 0,0521309113, \quad h^2 = 2,24 \times 10^{-7}, \quad \delta^2 = 6,41 \times 10^{-6}.$$

Если начальное приближение параметра регуляризации  $\alpha$  выбрано достаточно большим, то значение  $\rho(\alpha)$  будет положительным.

Пусть  $\alpha_0 = 1/\mu_0$ ,  $\alpha_1 = 1/\mu_1$  таковы, что  $\rho(\alpha_0)$ ,  $\rho(\alpha_1)$  положительны, и пусть  $\alpha_0 > \alpha_1$ , т.е.  $\rho(\alpha_0) > \rho(\alpha_1)$ . Тогда последовательность метода хорд, построенная по формулам

$$\mu_n = \mu_0 - \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma(\mu_0) - \sigma(\mu_1)} \sigma(\mu_0), \quad \alpha_n = \frac{1}{\mu_n}, \quad \mu_0 = \mu_1, \quad \mu_1 = \mu_n, \quad (5)$$

будет монотонной:  $\mu_{n+1} > \mu_n$  и при этом  $\sigma(\mu_n) \geq 0$  для всех  $n$ . Сходимость метода хорд в этом случае гарантируется.

Если же  $h \neq 0$  и оператор задан с погрешностью, то выпуклость обобщенной невязки  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$  может нарушаться и гарантировать монотонность и сходимость последовательности метода хорд в этом случае нельзя. Однако, если  $\sigma(\mu_n) = \rho(1/\mu_n) > 0$  для всех  $\mu_n$ , построенных по формулам (5), то в силу монотонности обобщенной невязки  $\mu_{n+1} > \mu_n$ . Таким образом, если значения обобщенной невязки во всех точках  $\mu_n$  положительны, то можно утверждать, что метод хорд сходится. Если же  $\sigma(\mu_{n_0}) < 0$  при каком-либо  $n_0$ , то дальнейшее применение метода хорд

в формуле (5) необоснованно. Поэтому в этом случае для решения уравнения  $\sigma(\mu) = 0$  при  $n > n_0$  применяется следующая модификация метода хорд:

$$\mu_n = \mu_0 - \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma(\mu_0) - \sigma(\mu_1)} \sigma(\mu_0), \quad \alpha_n = \frac{1}{\mu_n},$$

если  $\sigma(\mu_0)\sigma(\mu_n) < 0$ , то  $\mu_1 = \mu_n$ ;

если  $\sigma(\mu_1)\sigma(\mu_n) < 0$ , то  $\mu_0 = \mu_n$ .

(6)

Выполнение же одного из этих условий всегда можно гарантировать.

**1. Описание программы PTIMR.** Программа PTIMR может быть использована в двух режимах:

1) в первом режиме производится минимизация функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации  $\alpha$ ;

2) во втором режиме программа PTIMR подбирает значения параметра регуляризации  $\alpha$  в соответствии с принципом обобщенной невязки (см. § 2 гл. 1).

Форма обращения к программе:

CALL PTIMR (AK, U $\phi$ , A, B, C, D, N, M, Z, AN2, DL, H,

\* C1, IMAX, ALFA, U, NU, IERR, AMU, C2, ALP, EPSF)

Здесь:

AK(X, S) – подпрограмма-функция вычисления ядра  $K(x, s)$  уравнения (1).

U $\phi$  – входной параметр – массив значений правой части уравнения (1) на равномерной сетке  $\{x_i\}_{i=1}^m$  на отрезке  $[c, d]$ ,  $x_1 = c$ ,  $x_m = d$ , состоящей из M точек.

A, B, C, D – входные параметры – соответственно величины  $a, b, c, d$  уравнения (1).

N – входной параметр – размерность равномерной сетки  $\{s_j\}_{j=1}^n$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $s_1 = a$ ,  $s_n = b$ , на которой ищется неизвестная функция  $z(s)$ .

M – входной параметр – размерность сетки, на которой задана правая часть уравнения (1) (значение M должно быть не менее N).

Z – выходной параметр – массив из N чисел. После окончания работы программы PTIMR массив Z будет содержать экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при значении параметра регуляризации ALFA.

AN2 – выходной параметр – содержит после окончания работы программы значение функционала невязки  $\Phi(z^\alpha) = \|A_h z^\alpha - u_\delta\|_{L_2}^2$  на найденной экстремали функционала  $M^\alpha[z]$ .

DL – входной параметр – значение погрешности задания правой части уравнения (1):  $\delta^2 \geq \|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2}^2$ .

H – входной параметр – значение погрешности задания оператора A уравнения (1):  $h^2 \geq \|A - A_h\|_{L_2}^2$ .

C1 – входной вещественный параметр, определяющий режим работы программы PTIMR:

$C1 \leq 1.0$  режим поиска экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации ALFA,

$C1 > 1.0$  – режим подбора параметра регуляризации по принципу обобщенной невязки, т.е. из условия  $\rho(\alpha) = 0$ , параметр  $C1$  определяет в этом случае также точность решения уравнения невязки, а именно, ищется такое значение  $\alpha$ , что  $|\rho(\alpha)| \leq \epsilon = (c_1 - 1)\delta^2$ , где  $c_1$  – значение параметра  $C1$ .

IMAX – входной параметр – максимально допустимое число итераций метода хорд при решении уравнения невязки, а также максимально допустимое число изменений параметра регуляризации при подборе такого значения, при котором обобщенная невязка положительна.

ALFA – входной и выходной параметр – параметр регуляризации: – в первом режиме ( $C1 \leq 1.0$ ) содержит значение параметра регуляризации, при котором определяется экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$ ; -

– во втором режиме ( $C1 > 1.0$ ) служит начальным приближением для корня уравнения  $\rho(\alpha) = 0$ . Начальное приближение рекомендуется выбирать таким образом, чтобы значение обобщенной невязки на нем было положительным. Если  $\|u_6\|^2 > \delta^2$ , то это условие будет выполняться для всех достаточно больших значений параметра регуляризации  $\alpha$ . Если значение обобщенной невязки на заданном начальном приближении параметра регуляризации отрицательно, то он умножается на 2 до тех пор, пока обобщенная невязка не станет положительной (но не более IMAX раз). Для построения последовательности метода хорд в качестве второй точки используется значение параметра регуляризации в 2 раза большее содержащегося в ALFA;

– в режиме подбора значения параметра регуляризации ( $C1 > 1.0$ ) по окончании работы программы PTIMR параметр ALFA содержит найденный корень уравнения невязки.

U – рабочий массив длиной не менее  $N * M + 10 * N + 2 * M$ .

NU – длина рабочего массива – входной параметр.

IERR – выходной параметр – код завершения программы:

IERR = 0 – найдено значение параметра регуляризации, удовлетворяющее с заданной точностью принципу обобщенной невязки, если это требовалось ( $C1 > 1.0$ ) (при этом использовался лишь вариант метода хорд в форме (5)), или найдена экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации ALFA ( $C1 \leq 1.0$ );

IERR = 1 – найдено значение параметра регуляризации, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки, при реализации метода хорд встретились отрицательные значения обобщенной невязки, т.е. нарушена выпуклость функционала  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$  (применялась модификация (6) метода хорд);

IERR = 64 – длины массива U не хватает для размещения рабочих массивов, значения всех выходных параметров не определены;

IERR = 65 – при подборе такого значения параметра регуляризации  $\alpha$ , что  $\rho(\alpha) > 0$ , значение  $\alpha$  было умножено IMAX раз на 2, но значение  $\rho(\alpha)$  осталось отрицательным; Z содержит экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при значении параметра регуляризации, содержащемся в ALFA;

IERR = 66 – при решении уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$  сделано IMAX итераций метода хорд по формулам (5), но заданная точность не достигнута; по окончании работы PTIMR в Z содержится экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при текущем значении параметра регуляризации из ALFA;

IERR = 67 – при решении уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$  всего сделано IMAX итераций метода хорд по формулам (5) и (6). Нарушена выпуклость функции  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$  (в методе хорд встретились отрицательные значения обобщенной невязки), в Z содержится экстремаль  $M^\alpha[z]$  при текущем значении ALFA;

IERR = 68 – задан или получился в процессе решения уравнения невязки параметр регуляризации, равный нулю, в Z – экстремаль функционала  $M^0[z]$ ;

IERR = 69 – за IMAX умножений значения  $\alpha$  на 2 не удалось локализовать минимум  $\rho_1(\alpha) = \|Az^\alpha - u\| + h\|z^\alpha\|$ ;

IERR = 70 – минимум  $\rho_1(\alpha)$  с заданной точностью не найден.

Остальные четыре параметра используются при  $C2 \geq 1$ .

AMU – выходной параметр – содержит найденное программой AUMINM значение минимума функционала  $\rho_1(\alpha)$ .

C2 – входной вещественный параметр, определяющий работу программы AUMINM:

если  $C2 \geq 1$ , то программа AUMINM ищет минимум  $\rho_1(\alpha)$ ; минимум считается достигнутым, если на  $n$ -й итерации  $|\alpha_n - \alpha_{n-1}| \leq 1/C2$  или  $|\rho_1(\alpha_n) - \rho_1(\alpha_{n-1})| \leq EPSF$ .

ALP – входной и выходной параметр. При обращении к PTIMR задает начальное приближение  $\alpha$  для процедуры минимизации функции  $\rho_1(\alpha)$  программой AUMINM. После окончания работы программы содержит вычисленное значение  $\alpha$ , на котором достигает минимума функция  $\rho_1(\alpha)$ .

EPSF – входной параметр – задает точность вычисления минимума для  $\rho_1(\alpha) : |\rho_1(\alpha_n) - \rho_1(\alpha_{n-1})| \leq EPSF$ .

При решении некорректно поставленной задачи для уравнения Фредгольма 1-го рода может возникнуть необходимость определить экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при различных значениях параметра регуляризации  $\alpha$  и одних и тех же значениях правой части уравнения (1). Непосредственное использование программы PTIMR для этой цели повлечет за собой многократное преобразование одной и той же системы линейных уравнений к трехдиагональному виду. Избежать этих повторных преобразований позволяет вход PTIMRE программы PTIMR. При использовании этого входа необходимо сохранять и восстанавливать перед обращением ко входу содержимое рабочего массива U. Отметим, что использование входа PTIMRE возможно и в случае подбора параметра регуляризации, например в случае, когда PTIMR завершилась по коду IERR = 65, 66 или 67.

Вызываемые подпрограммы: PTIMRC, PTIMRS, PTIMRD, PTIMR $\emptyset$ , PTIMR1, PTIMRP, PTIMRQ, PTIMRR, PTIMRN, PTIMRA, PTIMRK, PTICR $\emptyset$ , PTICR1, PTICR6, AUMINM.

Кратко опишем работу программы PTIMR. Операторы с 11 по 39 формируют начала рабочих массивов, а также устанавливают некоторые признаки и счетчики итераций. Затем, если это необходимо (вход не через PTIMRE), последовательным обращением к соответствующим подпрограммам производятся следующие действия.

1. В массиве АК формируется матрица A линейного оператора, аппроксимирующего интегральный оператор (подпрограмма PTICR $\emptyset$ ).





При реализации алгоритма следует учитывать возможность накопления погрешностей округлений, а также возникновения машинных нулей. В связи с этим при вычислении скалярных произведений и нормировке векторов следует применять специальные приемы. В частности, мы предлагаем для вычисления нормы векторов использовать программу PTIMR1, в которой применяется предварительная нормировка векторов.

6. Подпрограмма PTIMRQ вычисляет вектор  $q = Q'u_6$  и размещает его в массиве U2, здесь  $u_6$  — правая часть интегрального уравнения (1). Вектор U2 используется затем в подпрограмме PTIMRA для вычисления невязки. Для умножения матрицы  $Q$  на вектор правой части этот вектор последовательно отражается с использованием векторов, хранящихся в столбцах матрицы АК.

7. Подпрограмма PTIMRP формирует трехдиагональную матрицу  $P'P$ . В массивах С, В, А получаются соответственно поддиагональ, диагональ и наддиагональ этой матрицы.

8. Наконец, подпрограмма PTIMRR формирует в массиве U1 вектор  $f = RD'u_6$ , умножая вектор  $q$ , содержащийся в U2 и вычисленный программой PTIMRQ, на двухдиагональную матрицу  $P'$ . Вектор  $f$  служит правой частью трехдиагональной системы уравнений  $(P'P + \alpha E)x = f$ .

Операторы с 51 по 55 присваивают переменной AN1 значение  $\sum_{i=n+1}^m q_i^2$ .

Эта переменная входит как слагаемое в невязку независимо от параметра регуляризации  $\alpha$ . Эта величина является оценкой снизу для величины меры несовместности исходной системы уравнений и используется программой PTIMRA при вычислении обобщенной невязки как мера несовместности.

Если задано значение погрешности в операторе  $h \neq 0$ , то для нахождения минимизирует функционал  $\rho_1(\alpha) = \|Az^\alpha - u\| + h\|z\|$ . Для этого сначала умножением  $\alpha$  на 2 локализуется точка  $\alpha_0$  минимума  $\rho_1(\alpha)$  справа и слева, а затем методом золотого сечения строится последовательность  $\alpha_n$ , сходящаяся к  $\alpha_0$ . Вычисления заканчиваются при  $|\alpha_n - \alpha_{n-1}| \leq 1/C2$  или  $|\rho_1(\alpha_n) - \rho_1(\alpha_{n-1})| \leq \text{EPSF}$ .

Операторы 59, 61 формируют диагональ системы  $(P'P + \alpha E)x = f$  и решают эту систему методом прогонки (подпрограмма PTIMRN). Затем подпрограмма PTIMRA вычисляет невязку и обобщенную невязку, соответствующую данной экстремали Z, полученной подпрограммой PTIMRN. При этом, как указывалось в гл. I, нет необходимости производить переход к исходным неизвестным, поскольку невязка может быть вычислена по формуле  $\|Px - q\|^2$ , где  $P$  — двухдиагональная матрица. Как мы уже отмечали, часть слагаемых в этой норме постоянна и не зависит от параметра регуляризации и их сумма AN1 вычисляется 1 раз.

Если задано значение погрешности в операторе  $h \neq 0$ , то для нахождения обобщенной невязки необходимо вычислять норму решения в пространстве  $W_1^1$ . Для этого также нет необходимости возвращаться к старым переменным, так как норма решения в конечномерном аналоге пространства  $W_1^1$  совпадает с нормой решения трехдиагональной системы  $(P'P + \alpha E)x = f$  в обычном евклидовом пространстве.

Вычисленные таким образом невязка и норма решения домножаются на шаги сеток по переменным  $s$  и  $x$  в уравнении (1) таким образом, чтобы

полученные нормы были аппроксимацией интегральных норм в пространствах  $L_2 [c, d]$  и  $W_2^1 [a, b]$ . Тот же смысл имеет операция умножения параметра регуляризации  $\alpha$  на отношение шагов сетки при формировании диагонали матрицы  $P'P + \alpha E$  в операторах 60, 75, 91, 100.

Операторы с 63 по 69 проверяют необходимость окончания работы программ PTIMR и выполнение условия  $\rho(\alpha) > 0$ . Если это условие не выполнено, то параметр регуляризации  $\alpha$  умножается на 2 до тех пор, пока  $\rho(\alpha)$  не станет положительным. Всего допускается IMAX таких умножений параметра  $\alpha$  на 2.

Операторы с 70 до 77 формируют вторую точку, соответствующую удвоенному значению параметра регуляризации, необходимую для начала работы метода хорд.

Операторы с 78 по 94 реализуют метод хорд. Если значение обобщенной невязки становится отрицательным, то происходит переход на оператор 95 – начало модифицированного метода хорд, реализуемого операторами с 95 по 114.

Программа PTIMR завершает свою работу формированием признака завершения и обратным переходом к старым переменным, реализованным в подпрограмме PTIMRK, как это описано в § 6 гл. I.

В качестве тестового расчета предлагается использовать решение задачи (1) с ядром (2) и значениями  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -2$ ,  $d = 2$ . В качестве точного решения задачи будем использовать

$$\bar{z}(s) = (e^{-(s-0,3)^2/0,03} + e^{-(s-0,7)^2/0,03})/0,9550408 - 0,052130913.$$

Сетку по переменной  $s$  на отрезке  $[a, b]$  выберем из  $n = 41$  точек. Будем использовать значения правой части на сетке из  $m = 41$  точек, вычисленные в соответствии с (3). Точности задания правой части и оператора будем считать равными соответственно  $\delta^2 = 10^{-8}$  и  $h^2 = 10^{-10}$ . В качестве начального приближения параметра регуляризации выберем значение  $\alpha = 4 \times 10^{-4}$ . Уравнение невязки  $\rho(\alpha) = 0$  будем решать с точностью  $10^{-11}$  (т.е. зададим значение параметра  $C1 = 1,001$ ) и будем искать такие  $\alpha$ , что  $|\rho(\alpha)| \leq 10^{-11}$ .

Числовые значения приближенного решения, а также программа, вызывающая PTIMR, приведены на рис. 4.2.

**2. Описание программы PTIZR.** Программа PTIZR может быть использована так же, как и PTIMR, в двух режимах:

1) в первом режиме производится минимизация функционала  $M^\alpha [z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации;

2) во втором режиме программа PTIZR подбирает параметр регуляризации  $\alpha$  в соответствии с принципом обобщенной невязки  $\rho(\alpha) = 0$  (см. § 2 гл. I).

Форма обращения к программе:

CALL PTIZR(AK, U $\phi$ , A, B, C, D, N, M, Z, AN2, DL, H, C1, IMAX,

\* ALFA, U, NU, IERR)

Здесь:

AK(X, S) – подпрограмма-функция вычисления ядра  $K(x, s)$  уравнения (1).

```

0001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0002      DIMENSION Z0(41),U0(41),U(5000),Z(41)
0003      EXTERNAL AK
0004      X1=0.
0005      X2=1.
0006      Y1=-2.
0007      Y2=2.
0008      N=41.
0009      M=41
0010      IMAX=1000
0011      C1=1.001
0012      ALFA=0.0004
0013      HX=(X2-X1)/(N-1.)
0014      CALL PTICR0(AK,U,X1,X2,Y1,Y2,N,M)
0015      H=1.E-10
0016      DO 57 I=1,N
0017      X=X1+HX*(I-1.)
0018      Z0(I)=(DEXP(-(X-0.3)**2/0.03)+
+DEXP(-(X-0.7)**2/0.03))/0.955040800-
-0.0521309113
0019      57 CONTINUE
0020      CALL PTICR3(U,Z0,U0,N,M)
0021      PRINT 501,(Z0(II),II=1,N)
0022      501 FORMAT(1X,' ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ='/(5F11.7))
0023      DL=1.E-8
0024      PRINT 502,H,DL
0025      502 FORMAT(' .'/
* ПОГРЕШНОСТИ:      В ОПЕРАТОРЕ -',D16.9/
*                   В ПРАВОЙ ЧАСТИ -',D16.9)
0026      CALL PTIMR(AK,U0,X1,X2,Y1,Y2,N,M,Z,AN2,
*DL,H,C1,IMAX,ALFA,U,10000,IERR)
0027      PRINT 503,(Z(II),II=1,N)
0028      PRINT 504,IERR,AN2,ALFA
0029      503 FORMAT(' .'/
*                   ПРИВЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:'/(5F11.7))
0030      504 FORMAT(' .'/
*                   КОД ЗАВЕРШЕНИЯ           :',I5/
*                   НЕВЯЗКА                   :',D16.9/
*                   ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ  :',D16.9)
0031      STOP
0032      END

0001      FUNCTION AK(X,Y)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      AK=1./(1.+100.*(X-Y)**2)
0004      RETURN
0005      END

```

\*\*\*\*\* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ=

-0.00000000	0.0320465	0.0782459	0.1415609	0.2238816
0.3251419	0.4425163	0.5699656	0.6983832	0.8164924
0.9124512	0.9758983	1.00000000	0.9829996	0.9288697
0.8468924	0.7502625	0.6540358	0.5728488	0.5188144
0.4998815	0.5188144	0.5728488	0.6540358	0.7502625
0.8468924	0.9288697	0.9829996	1.00000000	0.9758983
0.9124512	0.8164924	0.6983832	0.5699656	0.4425163
0.3251419	0.2238816	0.1415609	0.0782459	0.0320465
-0.00000000				

ПОГРЕШНОСТИ:

В ОПЕРАТОРЕ - 0.999999944D-10  
 В ПРАВОЙ ЧАСТИ - 0.100000008D-07

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:

0.0173081	0.0311578	0.0715787	0.1366338	0.2238399
0.3296361	0.4487824	0.5745464	0.6991498	0.8137768
0.9084308	0.9725681	0.9974897	0.9802096	0.9256576
0.8447169	0.7506126	0.6567675	0.5762365	0.5213061
0.5017045	0.5213061	0.5762365	0.6567675	0.7506126
0.8447169	0.9256576	0.9802096	0.9974897	0.9725681
0.9084308	0.8137768	0.6991498	0.5745464	0.4487824
0.3296361	0.2238399	0.1366338	0.0715788	0.0311579
0.0173083				

КОД ЗАВЕРШЕНИЯ

: 0

НЕВЯЗКА

: 0.178224585D-07

ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

: 0.244141302D-06

Р и с. 4.2

$U\phi$  – входной параметр – массив значений правой части уравнения (1) на равномерной сетке  $\{x_i\}_{i=1}^m$  на отрезке  $[c, d]$ ,  $x_1 = c$ ,  $x_m = d$ , состоящей из  $M$  точек.

$A, B, C, D$  – входные параметры – соответственно величины  $a, b, c, d$  уравнения (1).

$N$  – входной параметр – размерность равномерной сетки  $\{s_j\}_{j=1}^n$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $s_1 = a$ ,  $s_n = b$ , на которой определяется неизвестная функция  $z(s)$ .

$M$  – входной параметр – размерность равномерной сетки  $\{x_i\}_{i=1}^m$ , на которой задана правая часть уравнения (1).

$Z$  – входной и выходной параметр. При обращении к PTIZR в  $Z$  задается начальное приближение к экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  при заданном в ALFA значении параметра регуляризации (массив длины  $N$ ). После окончания работы программы PTIZR параметр  $Z$  содержит массив значений экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  при значении параметра регуляризации, содержащемся в ALFA.

$AN2$  – выходной параметр – простая переменная, содержащая после окончания работы программы значение функционала невязки  $\Phi(z) = \|A_n z - u_\delta\|^2$  на найденной экстремали  $Z$ .

DL – входной параметр – значение погрешности  $\delta^2$  задания правой части уравнения (1):  $\delta^2 \geq \|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2}^2$ .

H – входной параметр – погрешность  $h^2$  задания оператора A уравнения (1):  $h^2 \geq \|A_h - A\|^2$ .

C1 – входной вещественный параметр, определяющий режим работы программы PTIZR:

C1  $\leq$  1.0 – режим поиска экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации ALFA;

C1  $>$  1.0 – режим подбора параметра регуляризации в соответствии с принципом обобщенной невязки, т.е. из условия  $\rho(\alpha) = 0$ ; в этом случае параметр C1 задает также точность решения уравнения невязки – подбирается такое значение параметра регуляризации  $\alpha$ , что  $|\rho(\alpha)| \leq \epsilon = (c_1 - 1)\delta^2$ , где значение  $c_1$  задано в параметре C1.

IMAX – входной параметр – максимально допустимое число итераций метода хорд при решении уравнения невязки, а также максимально допустимое число умножений параметра регуляризации на 2 при подборе такого значения, при котором обобщенная невязка положительна.

ALFA – входной и выходной параметр:

– в режиме подбора параметра регуляризации (C1  $>$  1.0), задаваемое в ALFA при обращении к PTIZR значение параметра регуляризации служит начальным приближением для корня уравнения невязки. При этом рекомендуется задавать такое начальное приближение параметра ALFA, при котором значение обобщенной невязки на экстремали функционала положительно. Если квадрат нормы правой части  $\|u_\delta\|_{L_2}^2$  больше значения DL, то это условие выполняется для всех достаточно больших значений параметра регуляризации. Если значение обобщенной невязки на начальном приближении отрицательно, то параметр регуляризации умножается на 2 до тех пор, пока обобщенная невязка не станет положительной (но не более IMAX раз). После окончания программы PTIZR переменная ALFA содержит (в режиме C1  $>$  1.0, в случае успешного завершения) значение параметра регуляризации, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки;

– в режиме C1  $\leq$  1.0 параметр ALFA при обращении содержит значение параметра регуляризации, при котором необходимо определить экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$ .

U – рабочий массив длиной не менее  $N * M + 2 * N + M$ .

NU – входной параметр – длина рабочего массива.

IERR – выходной параметр – код завершения программы:

IERR = 0 – найдено значение параметра регуляризации, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки, если это требовалось (при этом использовался метод хорд в форме (5)), или найдена экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра ALFA (C1  $\leq$  1.0);

IERR = 1 – найдено значение параметра регуляризации, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки; при решении уравнения невязки использовался модифицированный метод хорд (6) (встретились отрицательные значения обобщенной невязки, т.е. нарушена выпуклость функции  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$ ); после окончания PTIZR в Z – экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$ ;

IERR = 64 – не хватает длины рабочего массива; значения всех выходных параметров не определены;

IERR = 65 – при подборе значений параметра регуляризации  $\alpha$ , которому соответствует положительное значение обобщенной невязки, сделано IMAX умножений параметра  $\alpha$  на 2, а обобщенная невязка отрицательна; по окончании – в Z экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$  при значении параметра регуляризации, содержащемся в ALFA;

IERR = 66 – при решении уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$  сделано IMAX итераций метода хорд в форме (5), а заданная точность не достигнута; по окончании – в Z экстремаль при текущем значении параметра  $\alpha$  из ALFA;

IERR = 67 – при решении уравнения невязки сделано IMAX итераций методом хорд (5) и модифицированным методом хорд (6), но заданная точность не достигнута; при реализации метода хорд встретились отрицательные значения обобщенной невязки; нарушена выпуклость функции  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$ ; по окончании в Z экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$  при текущем значении параметра регуляризации ALFA;

IERR = 68 – задано или получено значение параметра регуляризации  $\alpha = 0$ ; по окончании в массиве Z содержится экстремаль функционала  $M^0 [z]$ .

При решении уравнения (1) может возникнуть необходимость определения экстремали функционала  $M^\alpha [z]$  при различных значениях параметра регуляризации  $\alpha$ . В этом случае использование входа PTIZRE позволяет избежать повторного формирования матрицы оператора.

Для этого достаточно при повторных вызовах программ обращаться ко входу PTIZRE с теми же фактическими параметрами. При этом необходимо следить за сохранением между обращениями к PTIZR и PTIZRE первых  $N * M$  элементов рабочего массива U. Использование входа PTIZRE возможно также в режиме подбора параметра регуляризации по принципу обобщенной невязки, если, например, программа PTIZR окончилась по коду IERR = 65, 66 или 67.

Вызываемые подпрограммы: PTIZR1, PTIZRA, PTICRO, PTICR $\phi$ , PTICR1, PTICR3, PTICR4, PTICR5, PTICR6, PTICR8.

Кратко опишем работу программы PTIZR. Операторы с 9 по 29 формируют начала массивов, делают необходимые начальные установки, а также, если это необходимо, формируют матрицу A оператора (подпрограмма PTICR $\phi$ ).

Операторы с 30 по 39 подбирают такой параметр регуляризации  $\alpha$ , что соответствующее ему значение обобщенной невязки положительно. Для этого параметр регуляризации последовательно умножают на 2 (не более IMAX раз). Для нахождения экстремали функционала  $M^\alpha [z]$  используется подпрограмма PTIZR1, реализующая метод сопряженных градиентов. Подпрограмма PTIZRA вычисляет значения обобщенной невязки.

Операторы с 40 по 46 формируют вторую начальную точку для метода хорд. Затем операторы с 47 по 60 реализуют метод хорд. Если возникает необходимость (нарушена выпуклость обобщенной невязки), то операторы с 61 по 79 реализуют модифицированный метод хорд.

Отметим, что в качестве начального приближения для минимизации функционала  $M^\alpha [z]$  на очередном шаге используется экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$  при предыдущем значении параметра регуляризации.

```

0001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0002      DIMENSION U0(41),Z(41),U(5000),Z0(41)
0003      EXTERNAL AK
0004      X1=0.
0005      X2=1.
0006      Y1=-2.
0007      Y2=2.
0008      N=41
0009      M=41
0010      IMAX=1000
0011      C1=1.001
0012      ALFA=0.000001
0013      HX=(X2-X1)/(N-1.)
0014      CALL PTICR0(AK,U,X1,X2,Y1,Y2,N,M)
0015      H=1.E-10
0016      DO 57 I=1,N
0017      X=X1+HX*(I-1.)
0018      Z0(I)=(DEXP(-(X-0.5)**2/0.06))
0019      57 CONTINUE
0020      PRINT 501,(Z0(II),II=1,N)
0021      501 FORMAT(1X,'ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ='/(5F11.7))
0022      CALL PTICR3(U,Z0,U0,N,M)
0023      DL=1.E-8
0024      PRINT 502,H,DL
0025      502 FORMAT(' .'/
* ПОГРЕШНОСТИ:           В ОПЕРАТОРЕ -',D16.9/
*                           В ПРАВОЙ ЧАСТИ -',D16.9)
0026      DO 34 I=1,N
0027      34 Z(I)=0.
0028      CALL PTIZR(AK,U0,X1,X2,Y1,Y2,N,M,Z,
*AN2,DL,H,C1,IMAX,ALFA,U,
*10000,IERR)
0029      PRINT 503,(Z(II),II=1,N)
0030      PRINT 504,IERR,AN2,ALFA
0031      503 FORMAT(' .'/
* ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:'/(5F11.7))
0032      504 FORMAT(' .'/
* КОД ЗАВЕРШЕНИЯ           :',I5/
* НЕВЯЗКА                   :',D16.9/
* ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ  :',D16.9)
0033      STOP
0034      END

0001      FUNCTION AK(X,Y)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      AK=1./(1.+100.*(X-Y)**2)
0004      RETURN
0005      END

```



\*\*\*\*\* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ=

0.0155039	0.0232740	0.0342181	0.0492711	0.0694834
0.0959671	0.1298122	0.1719732	0.2231302	0.2835359
0.3528661	0.4300946	0.5134171	0.6002454	0.6872893
0.7707304	0.8464817	0.9105104	0.9591895	0.9896374
1.0000000	0.9896374	0.9591895	0.9105104	0.8464817
0.7707304	0.6872893	0.6002454	0.5134171	0.4300946
0.3528661	0.2835359	0.2231302	0.1719732	0.1298122
0.0959671	0.0694834	0.0492711	0.0342181	0.0232740
0.0155039				

ПОГРЕШНОСТИ:                    В ОПЕРАТОРЕ - 0.999999944D-10  
                                       В ПРАВОЙ ЧАСТИ - 0.100000008D-07

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:

0.0211643	0.0240784	0.0328794	0.0475972	0.0684072
0.0957261	0.1302309	0.1728098	0.2243091	0.2850577
0.3545593	0.4316402	0.5146232	0.6011371	0.6878841
0.7708297	0.8457517	0.9088284	0.9568809	0.9871938
0.9975960	0.9871938	0.9568809	0.9088284	0.8457517
0.7708297	0.6878841	0.6011371	0.5146232	0.4316402
0.3545593	0.2850577	0.2243092	0.1728098	0.1302309
0.0957261	0.0684072	0.0475972	0.0328794	0.0240785
0.0211644				

КОД ЗАВЕРШЕНИЯ                    :        0  
 НЕВЯЗКА                                :    0.151755077D-07  
 ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ        :    0.929922942D-06

Р и с. 4.3

Подпрограмма PTIZR1 минимизации функционала  $M^\alpha[z]$  делает N итераций метода сопряженных градиентов. Для вычисления градиента функционала  $M^\alpha[z]$ , значения функционала невязки и одномерной минимизации используются соответствующие подпрограммы (PTICR4, PTICR5, PTICR8, PTICRO).

В качестве тестового примера использовании программы PTIZR рассмотрим решение задачи (1) с ядром (2) и значениями  $a = 0, b = 1, c = -2, d = 2$  при точном решении

$$\bar{z}(s) = \exp \left| - \frac{(s - 0,5)^2}{0,06} \right|.$$

Сетки по обеим переменным выберем из 41 точки ( $n = m = 41$ ). В качестве правой части используем значения, вычисляемые в соответствии с (3). Точности задания оператора и правой части будем считать равными соответственно  $h^2 = 10^{-10}$  и  $\delta^2 = 10^{-8}$ . Начальное приближение параметра регуляризации  $\alpha = 10^{-6}$ . Уравнение невязки будем решать с точностью до  $10^{-11}$ , что соответствует значению  $C1 = 1,001$ . Числовые значения полученного решения показаны на рис. 4.3. Это решение соответствует значению параметра регуляризации  $\alpha = 9,30 \times 10^{-7}$  и невязке  $1,52 \times 10^{-8}$ .

## § 2. Описание программы решения интегральных уравнений с априорными ограничениями методом регуляризации

В настоящем параграфе описывается программа РТИР, предназначенная для решения интегральных уравнений Фредгольма (1) в случае, когда относительно решения имеется априорная информация о его положительности или монотонности. Основа метода описана в § 2, 5, 6 гл. I. Для выбора параметра регуляризации используется принцип обобщенной невязки. В качестве стабилизирующего функционала используется стабилизатор первого порядка, т.е. используется  $Z$  – гильбертово пространство с нормами

$$\|z\|_1^2 = \int_a^b (|z(s)|^2 + |z'(s)|^2) ds, \quad \|z\|_2^2 = z(b) + \int_a^b |z'(s)|^2 ds.$$

Это позволяет гарантировать равномерную сходимость приближенных решений к точному. Для отыскания экстремала сглаживающего функционала  $M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha \|z\|^2$  при фиксированном значении параметра регуляризации  $\alpha$  программа РТИР использует метод проекции сопряженных градиентов, описанный в § 3 гл. III.

Для выбора параметра регуляризации используется модификация метода: хорд, описанная в предыдущем параграфе.

**Описание программы РТИР.** Программа РТИР может быть использована в двух режимах:

- 1) в первом режиме производится минимизация функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации;
- 2) во втором режиме программа РТИР подбирает параметр регуляризации  $\alpha$  в соответствии с принципом обобщенной невязки  $\rho(\alpha) = 0$  (см. § 2 гл. I).

Форма обращения к программе:

CALL РТИР(АК, UØ, А, В, С, D, N, M, Z, IC, AN2, DL,

\* Н, C1, ANGRD, IMAX, ALFA, U, NU, IERR)

Здесь:

АК(X, S) – подпрограмма-функция вычисления ядра  $K(x, s)$  уравнения (1).

UØ – входной параметр-массив значений правой части уравнения (1) на равномерной сетке  $\{x_i\}_{i=1}^m$  на отрезке  $[c, d]$ ,  $x_1 = c$ ,  $x_m = d$ , состоящей из M точек.

А, В, С, D – входные параметры – соответственно величины  $a, b, c, d$  уравнения (1).

N – входной параметр – размерность равномерной сетки  $\{s_j\}_{j=1}^n$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $s_1 = a$ ,  $s_n = b$ , на которой определяется неизвестная функция  $z(s)$ .

M – входной параметр – размерность равномерной сетки  $\{x_i\}_{i=1}^m$ , на которой задана правая часть уравнения (1).

Z – входной и выходной параметр. При обращении к РТИР в Z задается начальное приближение к экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  при заданном в ALFA значении параметра регуляризации (массив длины N).

После окончания работы программы РТИР параметр Z содержит массив значений экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  при значении параметра регуляризации, содержащемся в ALFA.

IS – входной параметр, определяющий множество априорных ограничений на искомое решение.

IS = 0 – решение уравнения (1) – ищется на множестве неотрицательных функций  $z(s) \geq 0$ . В качестве нормы в Z используется  $\|z\|_1$ .

IS = 1 – решение уравнения (1) – ищется на множестве неотрицательных монотонно не возрастающих функций. В качестве нормы в Z в этом случае используется  $\|z\|_2$ .

AN2 – выходной параметр – простая переменная, содержащая после окончания работы программы значение функционала невязки  $\Phi(z) = \|A_h z - u_\delta\|_{L_2}^2$  на найденной экстремали  $z(s)$ .

DL – входной параметр – значение погрешности  $\delta^2$  задания правой части уравнения (1):  $\delta^2 \geq \|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2}^2$ .

H – входной параметр – погрешность  $h^2$  задания оператора A уравнения (1):  $h^2 \geq \|A_h - A\|^2$ .

C1 – входной вещественный параметр, определяющий режим работы программы РТИР:

$C1 \leq 1,0$  – режим поиска экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации ALFA;

$C1 > 1,0$  – режим подбора параметра регуляризации в соответствии с принципом обобщенной невязки, т.е. из условия  $\rho(\alpha) = 0$ ; в этом случае параметр задает также точность решения уравнения невязки – подбирается такое значение параметра регуляризации  $\alpha$ , что  $|\rho(\alpha)| \leq \epsilon = (c_1 - 1)\delta^2$ , где значение  $c_1$  задано в параметре C1.

ANGRD – входной вещественный параметр, характеризующий точность решения задачи минимизации сглаживающего функционала при фиксированном параметре. Минимизация ведется до тех пор, пока  $\|\text{grad} M^\alpha[z]\|$  не станет меньше значения, указанного в ANGRD.

IMAX – входной параметр – максимально допустимое число итераций метода хорд при решении уравнения невязки, а также максимально допустимое число умножений параметра регуляризации на 2 при подборе такого значения, при котором обобщенная невязка положительна.

ALFA – входной и выходной параметр.

В режиме подбора параметра регуляризации ( $C1 > 1,0$ ) задаваемое в ALFA при обращении к РТИР значение параметра регуляризации служит начальным приближением для корня уравнения невязки. При этом рекомендуется задавать такое начальное приближение параметра ALFA, при котором значение обобщенной невязки на экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  положительно. Если квадрат нормы правой части  $\|u_\delta\|_{L_2}^2$  больше значения DL, то это условие выполняется для всех достаточно больших значений параметра регуляризации. Если значение обобщенной невязки на начальном приближении отрицательно, то параметр регуляризации умножается на 2 до тех пор, пока обобщенная невязка не станет положительной (но не более IMAX раз). После окончания программы РТИР переменная ALFA содержит (в режиме  $C1 > 1,0$  в случае успешного завершения) значение параметра регуляризации, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки.

```

0001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0002      DIMENSION U0(41),Z(41),U(10000),Z0(41)
0003      EXTERNAL AK
0004      X1=0.
0005      X2=1.
0006      Y1=-2.
0007      Y2=2.
0008      N=41
0009      M=41
0010      IMAX=1000
0011      C1=1.001
0012      IC=0
0013      ALFA=0.000001
0014      HX=(X2-X1)/(N-1.)
0015      CALL PTICR0(AK,U,X1,X2,Y1,Y2,N,M)
0016      H=1.E-0
0017      DO 57 I=1,N
0018      X=X1+HX*(I-1.)
0019      Z0(I)=(DEXP(-(X-0.5)**2/0.06))
0020 57 CONTINUE
0021      PRINT 501,(Z0(II),II=1,N)
0022 501 FORMAT(1X,' ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ='/(5F11.7))
0023      CALL PTICR3(U,Z0,U0,N,M)
0024      DL=1.E-8
0025      PRINT 502,H,DL
0026 502 FORMAT(' . ' /
* ПОГРЕШНОСТИ:          В ОПЕРАТОРЕ -',D16.9/
*                          В ПРАВОЙ ЧАСТИ -',D16.9)
0027      DO 34 I=1,N
0028 34 Z(I)=0.5
0029      CALL PTIPR(AK,U0,X1,X2,Y1,Y2,N,M,Z,IC,
*AN2,DL,H,C1,ANGRD,IMAX,ALFA,U,
*10000,IERR)
0030      PRINT 503,(Z(II),II=1,N)
0031      PRINT 504,IERR,AN2,ALFA
0032 503 FORMAT(' . ' /
* ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:'/(5F11.7))
0033 504 FORMAT(' . ' /
* КОД ЗАВЕРШЕНИЯ          :',I5/
* НЕВЯЗКА                  :',D16.9/
* ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ :',D16.9)
0034      STOP
0035      END

0001      FUNCTION AK(X,Y)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      AK=1./(1.+100.*(X-Y)**2)
0004      RETURN
0005      END

```

\*\*\*\*\* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ=

0.0155039	0.0232740	0.0342181	0.0492711	0.0694834
0.0959671	0.1298122	0.1719732	0.2231302	0.2835359
0.3528661	0.4300946	0.5134171	0.6002454	0.6872893
0.7707304	0.8464817	0.9105104	0.9591895	0.9896374
1.0000000	0.9896374	0.9591895	0.9105104	0.8464817
0.7707304	0.6872893	0.6002454	0.5134171	0.4300946
0.3528661	0.2835359	0.2231302	0.1719732	0.1298122
0.0959671	0.0694834	0.0492711	0.0342181	0.0232740
0.0155039				

ПОГРЕШНОСТИ:            В ОПЕРАТОРЕ - 0.99999944D-10  
                               В ПРАВОЙ ЧАСТИ - 0.100000008D-07

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:

0.0209515	0.0239206	0.0328357	0.0476677	0.0685403
0.0958447	0.1302666	0.1727281	0.2241152	0.2847853
0.3542541	0.4313463	0.5143773	0.6009675	0.6878113
0.7708668	0.8459039	0.9090915	0.9572387	0.9876165
0.9980419	0.9876165	0.9572387	0.9090915	0.8459039
0.7708668	0.6878113	0.6009675	0.5143773	0.4313463
0.3542541	0.2847854	0.2241152	0.1727281	0.1302666
0.0958446	0.0685403	0.0476677	0.0328357	0.0239207
0.0209516				

КОД ЗАВЕРШЕНИЯ            :    67  
 НЕВЯЗКА                    :    0.104321284D-07  
 ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ :    0.766789180D-06

Р и с. 4.4

В режиме  $C1 \leq 1,0$  параметр ALFA при обращении содержит значение параметра регуляризации, при котором необходимо определить экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$ .

U – рабочий массив длиной не менее  $N * M + 3 * N + 2 * M$ .

NU – входной параметр – длина рабочего массива.

IERR – выходной параметр – код завершения программы:

IERR = 0 – найдено значение параметра регуляризации, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки, если это требовалось (при этом использовался метод хорд в форме (5) или найдена экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$  при фиксированном значении параметра ALFA ( $C1 \leq 1,0$ ));

IERR = 1 – найдено значение параметра регуляризации, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки  $\rho(\alpha) = 0$  с заданной точностью, использовался модифицированный метод хорд (6) (встретились отрицательные значения обобщенной невязки, т.е. нарушена выпуклость функции  $\tau(\mu) = \rho(1/\mu)$ ), после окончания РТИР в Z – экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$ ;

IERR = 64 – не хватает длины рабочего массива; значения всех выходных параметров не определены;

IERR = 65 – при подборе значения параметра регуляризации  $\alpha$ , которому соответствует положительное значение обобщенной невязки, сле-

лано IMAX умножений параметра  $\alpha$  на 2, а обобщенная невязка отрицательна; по окончании – в  $Z$  экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$  при значении параметра регуляризации, содержащемся в ALFA;

IERR = 66 – при решении уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$  сделано IMAX итераций метода хорд в форме (5), а заданная точность не достигнута; по окончании в  $Z$  – экстремаль  $M^\alpha [z]$  при текущем значении параметра  $\alpha$  из ALFA;

IERR = 67 – при решении уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$  сделано IMAX итераций методом хорд (6), но заданная точность не достигнута; при реализации метода хорд встретились отрицательные значения обобщенной невязки; нарушена выпуклость функции  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$ ; по окончании в  $Z$  – экстремаль функционала  $M^\alpha [z]$  при текущем значении параметра регуляризации ALFA;

IERR = 68 – задано или получено значение параметра регуляризации  $\alpha = 0$ ; по окончании в массиве  $Z$  содержится экстремаль функционала  $M^0 [z]$ ;

IERR = 69 – задано значение IC, отличное от нуля и единицы. Значения входных параметров не определены.

При решении уравнения (1) может возникнуть необходимость определения экстремали функционала  $M^\alpha [z]$  при различных значениях параметра регуляризации  $\alpha$ . В этом случае использование входа PTIPRE позволяет избежать повторного формирования матрицы оператора и ее преобразований. Для этого достаточно при повторных вызовах программы обращаться ко входу PTIPRE с теми же фактическими параметрами. При этом необходимо сохранять и восстанавливать между обращениями к PTIPR и PTIPRE первые  $N * M$  элементов рабочего массива U. Использование входа PTIPRE возможно также в режиме подбора  $\alpha$  по принципу обобщенной невязки, если, например, программа PTIPR окончилась по коду IERR = 65, 66 или 67.

В любом случае при обращениях к PTIPR и PTIPRE необходимо задавать начальное приближение  $Z$  допустимым; при IC = 0 начальное приближение должно быть неотрицательным, а при IC = 1, кроме того, еще и монотонно невозрастающим.

Вызываемые подпрограммы – PTISR1, PTISR2, PTISR3, PTISR4, PTICR0, PTICR $\emptyset$ , PTICR1, PTICR2, PTIC12, PTICR3, PTICR4, PTICR5, PTICR6, PTICR7, PTICR8, PTICR9.

Работа программы PTIPR аналогична работе программы PTIZR, но вместо обращения к программе минимизации методом сопряженных градиентов PTIZR1 производится обращение к программе минимизации методом проекции сопряженных градиентов PTISR1. Необходимые преобразования матрицы оператора и очередного приближения производятся программами PTISR2 и PTISR3. Описания программ PTISR1, PTISR2, PTISR3 см. в § 7 настоящей главы.

В качестве тестового примера использования программы рассмотрим решение задачи (1) с ядром (2) и значениями  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -2$ ,  $d = 2$  при точном решении  $\bar{z}(s) = 1 - s^2$ . Сетки по обоим переменным выбраны из 41 точки. Программа, обращение и числовые значения результатов показаны на рис. 4.4.

### § 3. Описание программы решения интегрального уравнения типа свертки

В настоящем параграфе описана программа, реализующая алгоритм решения интегрального уравнения типа свертки с использованием метода регуляризации, основанного на определении экстремали функционала  $M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2$  и выборе параметра регуляризации в соответствии с принципом обобщенной невязки (см. § 2 гл. I).

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)z(s)ds = u(x). \quad (7)$$

Пусть известно, что локальный носитель ядра  $K(t)$  сосредоточен на отрезке  $[L_1, L_2]$ . Если точное решение  $\bar{z}(s)$  уравнения (7) имеет локальный носитель на отрезке  $[a, b]$ , то тем самым точная правая часть  $\bar{u}(x)$  сосредоточена на отрезке  $[c, d]$ , где  $c = a + L_1$ ,  $d = b + L_2$ . Будем считать, что приближенная правая часть известна на отрезке  $[c, d]$ . В такой постановке мы приходим к задаче, эквивалентной (7):

$$\int_a^b K(x-s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [c, d].$$

В силу предположений о расположении локального носителя решения  $\bar{z}(s)$  последнее уравнение можно переписать в виде

$$\int_{c - (L_1 + L_2)/2}^{d - (L_1 + L_2)/2} K(x-s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [c, d], \quad (8)$$

поскольку  $\left[ c - \frac{L_1 + L_2}{2}, d - \frac{L_1 + L_2}{2} \right] \supset [a, b]$ .

Остается отметить, что в силу соотношений между локальными носителями решения  $\bar{z}(s)$  и ядра  $K(t)$ , ядро  $K(t)$  можно считать периодически продолженным с его локального носителя  $[L_1, L_2]$  с периодом  $d - c = T$ . Таким образом, мы приходим к задаче, рассмотренной в § 7 гл. I (с точностью до тривиальных замен переменных). Поскольку ядро  $K(t)$  можно считать периодическим с периодом  $T = d - c$ , то для решения задачи может быть применена методика, основанная на применении быстрого преобразования Фурье, описанная в гл. I.

Отметим, что рассматриваемый алгоритм решения задачи (8) с периодическим ядром, а значит и задачи (7) с финитным ядром, дает решение  $z(s)$  на отрезке  $\left[ c - \frac{L_1 + L_2}{2}, d - \frac{L_1 + L_2}{2} \right]$ , содержащем локальный носитель точного решения  $\bar{z}(s)$  задачи (7)\*. Алгоритм решения задачи (8) с ядром  $K(t)$ , периодическим с периодом  $T = d - c$ , в соответствии с § 7 гл. I реализован в виде программ РТИКР и РТИКР1. При этом для решения уравнения невязки

$$\rho(\alpha) = \|A_h z^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z^\alpha\|)^2 = 0$$

\* )Расширение области интегрирования при переходе к (8) до отрезка длиной  $T = d - c > b - a$  может быть проведено, вообще говоря, различными способами.

применяется метод Ньютона. Необходимая для реализации этого метода производная функции  $\rho(\alpha)$  легко вычисляется по формуле (21) гл. I. (Выражение для  $\gamma'(\alpha)$  см. в § 6 гл. I.) Поскольку, как уже отмечалось в § 1 настоящей главы, в случае  $h = 0$  функция  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu)$  является монотонно убывающей и выпуклой, что гарантирует сходимость метода Ньютона (если на начальном приближении  $\mu_0$  значение  $\sigma(\mu_0) = \rho(1/\mu_0)$  положительно), то предлагаемая программа реализует применение метода Ньютона фактически для решения уравнения  $\sigma(\mu) = \rho(1/\mu) = 0$ . При этом  $\sigma'(\mu) = \rho'(1/\mu)/\mu^2$ .

В случае решения задачи (8) с приближенно заданным оператором ( $h \neq 0$ ) выпуклость функции  $\sigma(\mu)$  может нарушаться и сходимость метода Ньютона гарантировать нельзя. Поэтому, если в процессе реализации метода Ньютона появляются такие значения параметра регуляризации  $\alpha = 1/\mu$ , что  $\rho(\alpha) < 0$  (что может произойти, если нарушена выпуклость  $\sigma(\mu)$ ), то происходит переход на модификацию метода хорд (6).

Программа РТИКР, так же как и программы, описанные в предыдущих параграфах, может быть использована в двух режимах:

- 1) в первом режиме определяется экстремаль сглаживающего функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации  $\alpha$ ;
- 2) во втором режиме программа РТИКР подбирает параметр регуляризации  $\alpha$  в соответствии с принципом обобщенной невязки:

$$\rho(\alpha) = \|A_h z^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z^\alpha\|)^2 = 0,$$

здесь  $z^\alpha$  — экстремаль сглаживающего функционала

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2.$$

**1. Описание программы РТИКР.** Форма обращения к программе:

CALL РТИКР(АК, Uφ, А, В, С, D, L1, L2, N,

\*Z, AN2, DL, H, C1, IMAX, ALFA, U, NU, IERR)

Здесь:

АК(S) — подпрограмма-функция вычисления ядра  $K(s)$  уравнения (8).

Uφ — массив значений правой части  $u_\delta$  уравнения (8) на равномерной сетке  $\{x_j\}_{j=1}^n$  на отрезке  $[c, d]$ , состоящей из N точек:  $x_j = \frac{d-c}{n} \left( j - \frac{1}{2} \right)$  (число точек сетки должно быть равно целой степени двойки).

А, В — выходные параметры — границы отрезка  $\left[ c - \frac{L_1 + L_2}{2}, d - \frac{L_1 + L_2}{2} \right]$ , на котором находится приближенное решение уравнения (8).

С, D — входные параметры — соответственно величины  $c, d$  уравнения (8).

L1, L2 — входные параметры — границы локального носителя ядра  $K(s)$  уравнения (8) (переменные типа REAL).



$N$  – входной параметр – размерность равномерных сеток

$$\{x_j\}_{j=1}^n, \{s_j\}_{j=1}^n, s_j = \frac{d-c}{n} \left( j - \frac{1}{2} \right) + c - \frac{L_1 + L_2}{2},$$

соответственно на отрезках  $[c, d]$  и  $\left[ c - \frac{L_1 + L_2}{2}, d - \frac{L_1 + L_2}{2} \right]$ , на которых задается правая часть уравнения (8) и ищется его решение; число  $N$  должно иметь вид  $2^k$ , где  $k$  – целое.

$Z$  – выходной параметр – массив длиной  $N$ ; после окончания работы программы РТИКР содержит экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при значении параметра регуляризации, находящегося в ALFA.

AN2 – выходной параметр – простая переменная, содержащая после окончания работы программы значения функционала невязки  $\Phi(z) = \|A_h z - u_\delta\|^2$  на экстремали функционала  $M^\alpha[z]$ , находящейся в массиве  $Z$ .

DL – входной параметр – значение погрешности  $\delta^2$  задания правой части уравнения (8):  $\delta^2 \geq \|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2[c, d]}^2$ .

$H$  – входной параметр – значение погрешности  $h^2$  задания оператора  $A$  в уравнении (8), как оператора из  $W_2^1 \left[ c - \frac{L_1 + L_2}{2}, d - \frac{L_1 + L_2}{2} \right]$  в  $L_2[c, d]$ :  $h \geq \|A - A_h\|$ .

$C1$  – входной параметр, определяющий режим работы программы:

$C1 \leq 1,0$  – режим поиска экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации  $\alpha$ ;

$C1 > 1,0$  – режим подбора параметра регуляризации  $\alpha$  в соответствии с принципом обобщенной невязки, т.е. из условия  $\rho(\alpha) = 0$ ; при этом уравнение решается с точностью  $\epsilon = (c_1 - 1)\delta^2$  ( $c_1$  – значение параметра  $C1$ ), т.е. ищется такое значение параметра  $\alpha$ , что  $|\rho(\alpha)| \leq \epsilon$ .

IMAX – входной параметр – максимально допустимое число итераций метода Ньютона и метода хорд при решении уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$ .

ALFA – задаваемое значение параметра регуляризации. Во втором режиме ( $C1 > 1,0$ ) служит начальным приближением для корня уравнения  $\rho(\alpha) = 0$ . Начальное приближение рекомендуется выбирать таким образом, чтобы значение обобщенной невязки  $\rho(\alpha)$  на нем было положительным. Если квадрат нормы правой части  $\|u_\delta\|_{L_2}^2$  больше  $\delta^2$ , то это условие будет выполнено при достаточно больших значениях параметра регуляризации ALFA. Если условие  $\rho(\alpha) > 0$  на начальном приближении не выполнено, то значение параметра регуляризации умножается на 2 до тех пор, пока значение обобщенной невязки не станет положительным (но не более IMAX раз), а затем строится последовательность Ньютона, начиная от этого значения параметра. Во втором режиме ( $C1 > 1,0$ ) по окончании работы программы РТИКР параметр ALFA содержит значение параметра регуляризации, удовлетворяющее условию  $|\rho(\alpha)| \leq \epsilon$ .

$U$  – рабочий массив длиной не менее  $6 * N$ .

NU – входной параметр – длина рабочего массива  $U$ ; служит для контроля достаточности рабочего массива  $U$ .

IERR – выходной параметр – код завершения программы:

IERR = 0 – найдена экстремаль  $z^\alpha$  функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации в случае задания  $C1 \leq 1.0$ , или найдено методом Ньютона значение параметра регуляризации ALFA, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки, если это требовалось ( $C1 > 1.0$ );

IERR = 1 – в случае  $C1 > 1.0$  при реализации метода Ньютона встретились отрицательные значения обобщенной невязки  $\rho(\alpha)$ , т.е. нарушена выпуклость обобщенной невязки; решение уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$  найдено методом хорд;

IERR = 64 – не хватает длины рабочего массива U; значение параметра регуляризации ALFA при этом не изменилось, значение остальных выходных параметров не определено;

IERR = 65 – в случае  $C1 > 1.0$  задано такое начальное значение параметра регуляризации  $\alpha$ , что  $\rho(\alpha) < 0$ ; умножением параметра регуляризации на 2 не удалось подобрать такого значения, при котором обобщенная невязка положительна, т.е.  $\rho(\alpha 2^{i \max}) < 0$ ; после окончания программы РТИКР в ALFA – значение параметра регуляризации, в  $2^{i \max}$  раз больше исходного, в Z – экстремаль, соответствующая этому параметру;

IERR = 66 – в случае  $C1 > 1.0$  при реализации метода Ньютона сделано IMAX итераций, а корень уравнения невязки  $|\rho(\alpha)| \leq \epsilon = (c_1 - 1)\delta^2$  не найден; по окончании программы в ALFA – очередное приближение параметра регуляризации, а в Z – соответствующая ему экстремаль;

IERR = 67 – при реализации метода Ньютона встретились значения обобщенной невязки, меньшие нуля, произошел переход на метод хорд (это возможно при нарушении выпуклости обобщенной невязки  $\sigma(\mu)$  ( $h \neq 0$ )); всего методом Ньютона и методом хорд сделано IMAX итераций, а решения уравнения невязки не найдено; по окончании в ALFA – очередное приближение метода хорд, а в Z – соответствующая ему экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$ .

При использовании программы РТИКР для решения уравнения (8) может возникнуть необходимость определять экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при различных значениях параметра регуляризации  $\alpha$  и одних и тех же значениях правой части (8). Непосредственное использование программы РТИКР повлечет за собой многократное применение преобразования Фурье для одних и тех же функций. Избежать этих повторных преобразований позволяет вход РТИКРЕ программы РТИКР. При этом при повторном обращении достаточно обращаться не к самой программе РТИКР, а ко входу РТИКРЕ с фактическими параметрами, имеющими тот же смысл. При обращении ко входу РТИКРЕ необходимо следить за сохранением (восстановлением) перед обращением содержимого рабочего массива U. Заметим, что использование входа РТИКРЕ возможно и в случае режима подбора параметра регуляризации, например, в случае, когда РТИКР завершилась по коду IERR = 65, 66 или 67\*).

\*) Программа РТИКР может быть применена также для решения задач (8) с периодическими ядрами. В этом случае ядро  $K(t)$  с периодом  $T = d - c$  должно быть задано на отрезке  $[L_1, L_2]$  длиной  $L_2 - L_1 = 2T$ . Границы  $L_1, L_2$  должны быть согласованы с носителями правой части  $[c, d]$  и решения  $[a, b]: b - a = d - c$ . Например, если  $[c, d] = [a, b]$ , то необходимо выбирать  $L_1 = -T = c - d$ , а  $L_2 = T$ .

Собственно решение интегрального уравнения осуществляется программой РТІКR1, которая осуществляет поиск экстремали функционала  $M^\alpha[z]$  и решение уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$  методом Ньютона и хорд.

Операторы с 7 по 20 программы РТІКR1 вычисляют значение ядра и производят преобразование Фурье над ядром и правой частью, обращаясь к стандартной программе FTF1C, составленной Сысоевым А.Ф. (Текст этой программы см. в Приложении IV.)

Программа FTF1C формирует действительную и мнимую части (соответственно ARE и AIM) выражения

$$\tilde{z}_m = \sum_{j=1}^n \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{n} (j-1)(m-1) \right\} z_j$$

или

$$\tilde{z}_m = \sum_{j=1}^n \exp \left\{ i \frac{2\pi}{n} (j-1)(m-1) \right\} z_j$$

по заданному вектору  $z$  в зависимости от знака последнего параметра  $P$ . Действительная и мнимая части исходного вектора после работы программы замещаются действительной и мнимой частями его дискретного образа Фурье\*).

При повторном входе в программу РТІКR1 преобразование Фурье не производится.

Операторы с 21 по 48 подбирают значение параметра регуляризации, которому соответствует положительное значение обобщенной невязки. Если значение переменной EPRO – точности решения уравнения невязки – задано равным нулю, то после первого вычисления экстремали программа прекращает работу. В противном случае операторы с 49 по 83 реализуют метод Ньютона для решения уравнения невязки. Если реализация метода Ньютона приводит к отрицательным значениям обобщенной невязки, то программа переходит на метод хорд, реализованный операторами с 84 по 117.

Наконец, операторы с 118 по 148 формируют код завершения программы и производят обратное преобразование Фурье, снова обращаясь к программе FTF1C со значением  $P < 0$ .

В качестве тестового расчета предлагается использовать решение уравнения

$$\int_0^1 K(x-s)z(s)ds = u(x), \quad x \in (0, 2).$$

В качестве ядра уравнения будем использовать функцию  $K(t) = e^{-80(t-0,5)^2}$  с локальным носителем на интервале  $(0, 1)$ . Точное решение выберем в виде

$$\bar{z}(s) = ((e^{-(s-0,3)^2/0,03} + e^{-(s-0,7)^2/0,03})/0,9550408 - 0,052130913) * 1,4s.$$

\* ) Нужно отметить, что в последнее время очень интенсивно разрабатываются программы быстрого дискретного преобразования Фурье. Если у читателей есть другие стандартные программы БДФ, быть может, более удобные или быстродействующие, то необходимо внести соответствующие изменения в программу РТІКR1.

```

0001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0002      REAL*8 KERN,L1,L2
0003      DIMENSION U(400),U0(64),Z0(64),Z(64),
*ERR(64),KERN(64)

0004      EXTERNAL AK
0005      C=0.0
0006      D=2.0
0007      L1=0.0
0008      L2=1.0
0009      ALPHA=1.0
0010      C1=1.000001
0011      N=64
0012      IMAX=500
0013      ST=(D-C)/N
0014      DO 5 I=1,N
0015      S=(I-0.5)*ST-0.5
0016      Z0(I)=0.
0017      IF(S.LT.0.0.OR.S.GT.1.0)GOTO 5
0018      Z0(I)=((DEXP(-(S-0.3)**2/0.03)+
+DEXP(-(S-0.7)**2/0.03))/0.955040800-
-0.052130913)*1.4*S

0019      5 CONTINUE
0020      DO 554 K=1,N
0021      S=0.5*(L1+L2)+ST*(K-N/2-1)
0022      KERN(K)=0.
0023      IF(S.LT.L1.OR.S.GT.L2)GOTO 554
0024      KERN(K)=AK(S)
0025      554 CONTINUE
0026      HH=1.E-9
0027      DO 771 I=1,N
0028      S=0.0
0029      DO 770 J=1,N
0030      IND=I-J+N/2+1
0031      IF(IND.LT.1.OR.IND.GT.N)GOTO 770
0032      S=S+KERN(IND)*Z0(J)
0033      770 CONTINUE
0034      U0(I)=S*ST
0035      771 CONTINUE
0036      DL=1.E-8
0037      PRINT 999,(Z0(I),I=1,N)
0038      999 FORMAT('    ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ: '/(5F11.8))
0039      PRINT 553,DL,HH
0040      553 FORMAT('    ПОГРЕШНОСТИ: ' /
*      ПРАВАЯ ЧАСТИ :',D16.9/
*      ОПЕРАТОРА :',D16.9)
0041      CALL PTIKR(AK,U0,A,B,C,D,L1,L2,N,Z,AN,
*DL,HH,C1,IMAX,ALPHA,U,400,IERR)
0042      PRINT 501,IERR,AN,ALPHA,
*A,B,(Z(II)),II=1,N)
0043      501 FORMAT('    ' /
*      КОД ЗАВЕРШЕНИЯ :',
*      I5/
*      НЕВЯЗКА :',
*      D16.9/
*      ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ :',

```

```

*
* РЕШЕНИЕ ИЩЕТСЯ НА ИНТЕРВАЛЕ : ( ,
* F4.1, , , F3.1, ) /
* . / ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ : /
* (5F11.8)
0044 STOP
0045 END

```

```

0001 FUNCTION AK(Y)
0002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003 AK=DEXP(-80.*(Y-.5)**2)
0004 RETURN
0005 END

```

\*\*\*\*\* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ:

0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0004057	0.0046980	0.0164927	0.0397695
0.0781444	0.1332505	0.2030311	0.2807711	0.3556787
0.4153146	0.4493240	0.4531892	0.4305406	0.3930758
0.3580418	0.3440349	0.3662307	0.4321194	0.5386594
0.6716434	0.8078591	0.9200444	0.9836398	0.9833472
0.9171859	0.7965067	0.6420254	0.4775492	0.3238375
0.1946139	0.0955264	0.0255588	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ПОГРЕШНОСТИ:

ПРАВой ЧАСТИ : 0.100000008D-07  
 ОПЕРАТОРА : 0.100000008D-08

КОД ЗАВЕРШЕНИЯ : 0  
 НЕВЯЗКА : 0.344029377D-07  
 ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ : 0.573252231D-06  
 РЕШЕНИЕ ИЩЕТСЯ НА ИНТЕРВАЛЕ : (-0.5, 1.5)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ :

-0.0001732	-0.0000900	0.0000035	0.0000602	0.0000801
0.0000774	0.0000496	-0.0000177	-0.0001153	-0.0001816
-0.0001262	0.0000864	0.0003455	0.0003963	0.0000355
-0.0004805	0.0000786	0.0042919	0.0160250	0.0397120
0.0789945	0.1350374	0.2051117	0.2821066	0.3554450
0.4134268	0.4464959	0.4504874	0.4287878	0.3925543
0.3586625	0.3457038	0.3689687	0.4357499	0.5423629
0.6739294	0.8072445	0.9161068	0.9776574	0.9778753
0.9146427	0.7976260	0.6452813	0.4801247	0.3237098
0.1925503	0.0957308	0.0344657	0.0034491	-0.0064979
-0.0052890	-0.0008893	0.0021278	0.0025232	0.0012019
-0.0003223	-0.0010524	-0.0008654	-0.0002313	0.0002975
0.0004465	0.0002744	0.0000081	-0.0001597	

Значения правой части  $u(x)$  на равномерной сетке на  $[0, 2]$  определим как произведение циркулянтной матрицы  $A$ , аппроксимирующей интегральный оператор в уравнении по формуле прямоугольником (рис. 4.5), на вектор значений точного решения. Погрешности задания правой части и оператора возьмем соответственно равными  $h^2 = 10^{-9}$ ,  $\delta^2 = 10^{-8}$ .

Применение к этой задаче программы РТИКР позволяет получить решение, численные значения которого приведены на рис. 4.5. Это решение является экстремалью функционала  $M^\alpha[z]$  при значении параметра регуляризации  $\alpha = 5,7 \times 10^{-7}$  и соответствует значению невязки  $3,44 \times 10^{-8}$ .

В качестве начального приближения параметра регуляризации использовалось значение  $\alpha = 1$ , уравнение невязки решалось с точностью до  $0,000001 \delta^2$ , т.е. искалось значение  $\alpha$ , для которого  $|\rho(\alpha)| \leq 0,000001 \delta^2$ .

#### § 4. Описание программы решения двумерных интегральных уравнений типа свертки

В настоящем параграфе рассмотрена программа, предназначенная для решения двумерного уравнения Фредгольма 1-го рода типа свертки

$$Az = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s, y-t) z(s, t) ds dt = u(x, y). \quad (9)$$

Пусть известно, что носитель  $\text{supp}K(u, w) \subset [l_1, L_1] \times [l_2, L_2]$ , а  $\text{supp}\bar{z}(s, t) \subset [a, A] \times [b, B]$ , тогда  $\text{supp}\bar{u}(x, y) \subset [c, C] \times [d, D]$ , где  $c = a + l_1$ ,  $C = A + L_1$ ,  $d = b + l_2$ ,  $D = B + L_2$ . Будем считать, что приближенная правая часть  $u_\delta(x, y)$  известна на прямоугольнике  $[c, C] \times [d, D]$ . Доопределив  $z(s, t)$  нулем вне  $[a, A] \times [b, B]$ , получим уравнение

$$Az = \int_{c - \frac{l_1 + L_1}{2}}^{c - \frac{l_1 + L_1}{2}} \int_{d - \frac{l_2 + L_2}{2}}^{d - \frac{l_2 + L_2}{2}} K(x-s, y-t) z(s, t) ds dt = u(x, y),$$

поскольку  $[a, A] \times [b, B] \subset \left[ c - \frac{l_1 + L_1}{2}, c - \frac{l_1 + L_1}{2} \right] \times \left[ d - \frac{l_2 + L_2}{2}, d - \frac{l_2 + L_2}{2} \right]$ . Продолжая ядро с его локального носителя  $[l_1, L_1] \times [l_2, L_2]$  с периодом  $T_1 = C - c$  по первому аргументу и  $T_2 = D - d$  по второму, мы получаем возможность применить результаты, описанные в гл. I для решения двумерных уравнений типа свертки с помощью двумерного быстрого дискретного преобразования Фурье.

Алгоритм решения реализован в программе РТИТР. Для решения уравнения

$$\rho(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|_{L_2}^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\|_{W_2^1})^2 = 0$$

применяется метод Ньютона; необходимая для этого производная  $\rho'(\alpha)$

легко вычисляется в явном виде. Все замечания по поводу сходимости этого метода, сделанные в предыдущем параграфе, остаются в силе. Головной программой является программа PTITR, вызов которой осуществляется оператором

CALL PTITR(AK, Uφ, ALIM, N1, N2, Z, DL, H,

\* C1, ALFA, AN2, U, NU, IMAX, IERR)

Здесь:

AK(U, W) – программа-функция вычисления ядра  $K(u, w)$  уравнения (9); Uφ – массив значений правой части  $u_\delta(x, y)$  на равномерных сетках  $\{x_k\}_{k=1}^{n_1}$ ,  $\{y_l\}_{l=1}^{n_2}$  на прямоугольнике  $[c, C] \times [d, D]$ . Числа точек сеток ( $n_1$  и  $n_2$ ) должны быть целыми степенями 2.

ALIM – вещественный массив длины 12; в последних 8 элементах должны быть заданы значения  $c, C, d, D, l_1, L_1, l_2$  и  $L_2$  последовательно; в элементах с 1 по 4 вычисляются параметры  $c - \frac{l_1 + L_1}{2}, C - \frac{l_1 + L_1}{2}, d - \frac{l_2 + L_2}{2}, D - \frac{l_2 + L_2}{2}$  – границы прямоугольника, на котором получено приближенное решение уравнения.

N1, N2 – размерности равномерных сеток по 1-му и 2-му аргументам; сами эти сетки, на которых задается правая часть, имеют вид

$$x_j = \frac{C - c}{n_1} \left( j - \frac{1}{2} \right) + c, \quad j = 1, 2, \dots, n_1;$$

$$y_k = \frac{D - d}{n_2} \left( k - \frac{1}{2} \right) + d, \quad k = 1, 2, \dots, n_2.$$

Решение ищется на сетках  $\{s_j\}_{j=1}^{n_1}$ ,  $\{t_k\}_{k=1}^{n_2}$  таких, что

$$s_j = x_j - \frac{l_1 + L_1}{2}, \quad t_k = y_k - \frac{l_2 + L_2}{2}.$$

Числа N1 и N2 должны быть целыми степенями двух.

Z – выходной параметр – массив длины N1 \* N2; после окончания работы программы содержит экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  на вышеуказанной сетке при значении параметра регуляризации, находящемся в ALFA.

DL – входной параметр – значение погрешности  $\delta^2$  правой части уравнения  $\delta^2 \geq \|u_\delta - u\|_{L_2}^2$ .

H – входной параметр – значение погрешности  $h^2$  оператора A:  $h^2 \geq \|A - A_h\|^2$ . Если вместо функции  $K(u, w)$  известна функция  $K_h(u, w)$ , заданная с погрешностью на прямоугольнике  $[l_1, L_1] \times [l_2, L_2]$ , то значение  $h^2$  может быть оценено сверху:

$$h^2 \leq 4(L_2 - l_2)(L_1 - l_1) \int_{l_1}^{L_1} \int_{l_2}^{L_2} |K(u, w) - K_h(u, w)|^2 du dw.$$

C1 – входной параметр, определяющий режим работы программы:

C1 ≤ 1,0 – режим поиска экстремали  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации ALFA;

$C1 > 1,0$  – режим выбора параметра регуляризации в соответствии с обобщенным принципом невязки, т.е. из уравнения  $\rho(\alpha) = 0$ . При этом уравнение  $\rho(\alpha) = 0$  решается с точностью  $\epsilon = (c_1 - 1)\delta^2$  ( $c_1$  – значение переменной  $C1$ ), т.е. ищется такое  $\alpha$ , что  $|\rho(\alpha)| \leq \epsilon$ .

ALFA – в первом режиме ( $C1 \leq 1,0$ ) входной параметр; во втором ( $C1 > 1,0$ ) – входной и выходной; начальное его значение служит нулевым приближением для корня обобщенной невязки.

AN2 – выходной параметр; по окончании работы программы содержит значение невязки  $\|A_h z^\alpha - u_\delta\|_{L_2}^2$  на экстремали функционала  $M^\alpha[z]$ , содержащейся в  $Z$ .

IMAX – входной параметр – максимально допустимое число итераций при решении уравнения  $\rho(\alpha) = 0$ .

U – рабочий массив длины не менее  $5 * N1 * N2 + N1 + N2$ ;

NU – входной параметр – длина массива U.

IERR – выходной параметр – код завершения; IERR = 0 – найдена экстремаль  $z^\alpha$  функционала  $M^\alpha[z]$  при фиксированном значении параметра регуляризации в случае задания  $C1 \leq 1.0$  или найдено методом Ньютона значение параметра регуляризации ALFA, удовлетворяющее принципу обобщенной невязки, если это требовалось ( $C1 > 1,0$ ):

IERR = 1 – в случае  $C1 > 1,0$  при реализации метода Ньютона встретились отрицательные значения обобщенной невязки  $\rho(\alpha)$ , т.е. нарушена выпуклость обобщенной невязки; решение уравнения невязки  $\rho(\alpha) = 0$  найдено методом хорд;

IERR = 64 – не хватает длины рабочего массива U; значение параметра регуляризации ALFA при этом не изменилось, значение остальных выходных параметров не определено;

IERR = 65 – в случае  $C1 > 1,0$  задано такое начальное значение параметра регуляризации  $\alpha$ , что  $\rho(\alpha) < 0$ . Умножением параметра регуляризации на 2 не удалось подобрать такого значения, при котором обобщенная невязка положительна, т.е.  $\rho(\alpha \cdot 2^{i_{\max}}) < 0$ . После окончания программы PTTR в ALFA – значение параметра регуляризации в  $2^{i_{\max}}$  раз больше исходного, в Z – экстремаль, соответствующая этому параметру;

IERR = 66 – в случае  $C1 > 1,0$  при реализации метода Ньютона сделано IMAX итераций, а корень уравнения невязки  $|\rho(\alpha)| \leq \epsilon = (c_1 - 1)\delta^2$  не найден; по окончании программы в ALFA – очередное приближение параметра регуляризации, а в Z – соответствующая ему экстремаль;

IERR = 67 – при реализации метода Ньютона встретились значения обобщенной невязки, меньшие нуля, произошел переход на метод хорд (это возможно при нарушении выпуклости обобщенной невязки  $\sigma(\mu)$  ( $h \neq 0$ )). Всего методом Ньютона и методом хорд сделано IMAX итераций, а решения уравнения невязки не найдено; по окончании в ALFA – очередное приближение метода хорд, а в Z – соответствующая ему экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$ ;

IERR = 68 – в режиме подбора параметра регуляризации ( $C1 > 1,0$ ) в качестве начального приближения задано значение ALFA, равное нулю, либо значение  $\alpha$ , равное нулю, появилось в процессе реализации итерационных методов решения уравнения невязки; по окончании работы программы PTTR в Z – экстремаль функционала  $M^0[z]$ .



```

0001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0002      REAL*8 KERN,L1,L2
0003      DIMENSION U(6500),U0(32,32),Z0(32,32),
*Z(32,32),ALIM(12),KERN(32,32)
0004      EXTERNAL AK
0005      ALIM(5)=0.
0006      ALIM(6)=2.0
0007      ALIM(7)=0.
0008      ALIM(8)=2.0
0009      ALIM(9)=0.
0010      ALIM(10)=1.0
0011      ALIM(11)=0.0
0012      ALIM(12)=1.0
0013      ALPHA=1.000
0014      C1=1.000001D0
0015      N1=32
0016      N2=32
0017      IMAX=500
0018      R=0.
0019      ST1=(ALIM(6)-ALIM(5))/N1
0020      ST2=(ALIM(8)-ALIM(7))/N2
0021      DO 5 I=1,N1
0022      DO 5 J=1,N2
0023      S1=(I-0.5)*ST1-0.5
0024      S2=(J-0.5)*ST2-0.5
0025      Z0(I,J)=0.
0026      IF(S1.LT.0.0.OR.S1.GT.1.0.
*        OR.S2.LT.0.0.OR.S2.GT.1.0)
*
*          GOTO 5
0027      Z0(I,J)=((DEXP(-(S1-0.3)**2/0.03)+
+DEXP(-(S1-0.7)**2/0.03))/0.9550408-
-0.052130913)*DEXP(-(S2-0.5)**2/0.03)
0028      5 CONTINUE
0029      DO 554 K=1,N1
0030      DO 554 L=1,N2
0031      S1=(ALIM(9)+ALIM(10))/2.+ST1*(K-N1/2-1)
0032      S2=(ALIM(11)+ALIM(12))/2.+ST2*(L-N2/2-1)
0033      KERN(K,L)=0.
0034      IF(S1.LT.ALIM(9).OR.S1.GT.ALIM(10).
* OR.S2.LT.ALIM(11).OR.S2.GT.ALIM(12))
*
*          GOTO 554
0035      KERN(K,L)=AK(S1,S2)
0036      554 CONTINUE
0037      HH=3.68D-11
0038      DO 771 I1=1,N1
0039      DO 771 I2=1,N2
0040      S=0.
0041      DO 770 J1=1,N1
0042      DO 770 J2=1,N2
0043      IND1=I1-J1+N1/2+1
0044      IND2=I2-J2+N2/2+1
0045      IF(IND1.LT.1.OR.IND1.GT.N1)GOTO 770
0046      IF(IND2.LT.1.OR.IND2.GT.N2)GOTO 770
0047      S=S+KERN(IND1,IND2)*Z0(J1,J2)
0048      770 CONTINUE

```

```

0049      U0(I1,I2)=S*ST1*ST2
0050      IF(R.LT.U0(I1,I2)) R=U0(I1,I2)
0051      771 CONTINUE
0052      DL=6.32D-07
0053      PRINT 553,DL,HH
0054      553 FORMAT(' ПОГРЕШНОСТИ : /'
*        ПРАВОЙ ЧАСТИ:      ',D16.9/
*        ОПЕРАТОРА:        ',D16.9)
0055      CALL FTITR(AK,U0,ALIM,N1,N2,Z,DL,HH,
*C1,ALPHA,AN,U,6500,IMAX,IERR)
0056      PRINT 501,IERR,AN,ALPHA
0057      501 FORMAT(' .',/
*        КОД ЗАВЕРШЕНИЯ      : ',I5/
*        НЕВЯЗКА              : ',D16.9/
*        ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ : ',D16.9)
0058      PRINT 503
0059      PRINT 502,(Z0(13,I),I=1,N2),
*(Z(13,I),I=1,N2)
0060      PRINT 505
0061      PRINT 502,(Z0(I,16),I=1,N1),
*(Z(I,16),I=1,N1)
0062      502 FORMAT(' ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ: /8(4F8.4/),
*        ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ: /8(4F8.4/))
0063      503 FORMAT(' .',/ СЕЧЕНИЕ X=0.28125 ')
0064      505 FORMAT(' .',/ СЕЧЕНИЕ Y=0.46875 ')
0065      1000 STOP
0066      END

```

```

0001      DOUBLE PRECISION FUNCTION AK(X,Y)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      AK=DEXP(-20.*(X-0.5)**2-20.*(Y-0.5)**2)
0004      RETURN
0005      END

```

\*\*\*\*\* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

```

СЕЧЕНИЕ X=0.28125
ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ:
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0006 0.0040 0.0192 0.0706
0.2000 0.4369 0.7354 0.9542
0.9542 0.7354 0.4369 0.2000
0.0706 0.0192 0.0040 0.0006
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:
-0.0063 -0.0077 -0.0080 -0.0047
0.0019 0.0076 0.0061 -0.0053
-0.0199 -0.0206 0.0150 0.1039
0.2449 0.4134 0.5661 0.6572
0.6572 0.5661 0.4134 0.2449

```

0.1039	0.0150	-0.0206	-0.0199
-0.0053	0.0061	0.0076	0.0019
-0.0047	-0.0080	-0.0077	-0.0063

СЕЧЕНИЕ Y=0.46875

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ:

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0408	0.1950	0.4586	0.7633
0.9542	0.9152	0.7023	0.5123
0.5123	0.7023	0.9152	0.9542
0.7633	0.4586	0.1950	0.0408
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:

0.0000	0.0030	0.0031	-0.0062
-0.0244	-0.0397	-0.0309	0.0233
0.1322	0.2834	0.4454	0.5792
0.6572	0.6766	0.6593	0.6387
0.6387	0.6593	0.6766	0.6572
0.5792	0.4454	0.2834	0.1322
0.0233	-0.0309	-0.0397	-0.0244
-0.0062	0.0031	0.0030	0.0000

Рис. 4.6 (окончание)

При использовании программы RTITR для решения уравнения (8) может возникнуть необходимость определять экстремаль функционала  $M^\alpha[z]$  при различных значениях параметра регуляризации  $\alpha$  и одних и тех же значениях правой части (8). Непосредственное использование программы RTITR повлечет за собой многократное применение преобразования Фурье для одних и тех же функций. Избежать этих повторных преобразований позволяет вход RTITRE программы RTITR. При этом при повторном обращении достаточно обращаться не к самой программе RTITR, а ко входу RTITRE с фактическими параметрами, имеющими тот же смысл. При обращении ко входу RTITRE необходимо следить за сохранением (восстановлением) перед обращением содержимого рабочего массива U. Заметим, что использование входа RTITRE возможно и в случае режима подбора параметра регуляризации, например в случае, когда RTITR завершилась по коду IERR = 65, 66 или 67).

Вызываемые функции и подпрограммы RTIKR3, FTFTC, RTCR1, RTCR2 приведены в Приложениях V и IX. Программу быстрого дискретного преобразования Фурье FTFC см. в Приложении IV.

В качестве тестового примера рассмотрим применение программы RTITR для решения интегрального уравнения

$$\int_0^1 \int_0^1 \exp \{-80[(x-s-0.5)^2 + (y-t-0.5)^2]\} z(s, t) ds dt, \quad x, y \in (0, 2).$$

Точное решение  $\bar{z}(s, t)$  выберем в виде

$$\bar{z}(s, t) = \left( \frac{e^{-\frac{(s-0,3)^2}{0,03}} + e^{-\frac{(s-0,7)^2}{0,03}}}{0,955040800} - 0,052130913 \right) e^{-\frac{(t-0,5)^2}{0,03}}.$$

Будем считать, что локальный носитель ядра сосредоточен на прямоугольнике  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

На рис. 4.6 приведена программа, вызывающая PTIGR для решения приведенного выше уравнения, и численные значения решения при  $s = 0,5$  и  $t = 0,5$ .

**§ 5. Описание программ решения некорректно поставленных задач на специальных множествах. Метод условного градиента**

Программы, рассмотренные в настоящем параграфе, предназначены для решения интегрального уравнения (1) с точно заданным оператором ( $h = 0$ ). В случае  $h \neq 0$  для решения задачи (1) можно использовать эти программы, если вместо величины погрешности задания правой части  $\delta$  использовать величину  $\delta + hC_0$ , где константа  $C_0$  – оценка сверху для нормы точного решения (см. § 1 гл. II), которая легко может быть получена в каждом случае на основании известных констант, ограничивающих точное решение.

Метод условного градиента (см. § 1 гл. III) для решения задачи (1) на множествах  $Z \downarrow_C$  монотонно невозрастающих,  $\tilde{Z} \downarrow_C$  монотонно невозрастающих выпуклых вверх,  $\tilde{Z}_C$  выпуклых вверх ограниченных функций, а также на множестве функций ограниченной вариации  $V_C = \{V_a^b(z) \leq C\}$  реализован в программах PTIGR, PTIGR1, PTIGR2.

Заметим, что задачи решения уравнения (1) с использованием априорной информации о принадлежности точного решения множествам функций, направление и монотонности и выпуклости которых не совпадают с предусмотренными программой PTIG, простыми заменами переменных легко приводятся к виду, к которому непосредственно можно применять описываемую программу.

Алгоритм, реализованный в программе PTIGR, строит минимизирующую последовательность для функционала невязки

$$\Phi(z) = \int_c^d \left[ \int_a^b K(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx$$

(конечно, в его конечно-разностной аппроксимации) до тех пор, пока не выполнится условие  $\Phi(z) \leq \delta^2$ , где  $\delta$  – погрешность задания правой части  $\|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2} \leq \delta$ .

**1. Описание программы PTIGR.** Головной программой метода является программа PTIGR. Форма обращения к ней

CALL PTIGR (AK, Uφ, A, B, C, D, N, M, Z, AN2, ITER, DL,  
\*IMAX, C1, C2, IC, U, NU, IERR)

Здесь:

AK(X, S) – подпрограмма-функция вычисления ядра  $K(x, s)$  уравнения (1).

$U\phi$  – входной параметр – массив значений правой части  $u_\delta(x)$  уравнения (1) на равномерной сетке  $\{x_i\}_{i=1}^m$  на отрезке  $[c, d]$ ,  $x_1 = c$ ,  $x_m = d$ , состоящей из  $M$  точек.

$A, B, C, D$  – входные параметры – соответственно величины  $a, b, c, d$  уравнения (1).

$N$  – входной параметр – размерность равномерной сетки  $\{s_j\}_{j=1}^n$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $x_1 = a$ ,  $s_n = b$ , на которой ищется неизвестная функция  $z(s)$ .

$M$  – входной параметр – размерность равномерной сетки  $\{x_i\}_{i=1}^m$  на отрезке  $[c, d]$ , на которой задана правая часть уравнения (1).

$Z$  – входной и выходной параметр. При обращении к программе PTIGR содержит начальное приближение к экстремали функционала невязки (массив длиной  $N$ ). Начальное приближение должно быть допустимой точкой, т.е. монотонным, выпуклым или монотонным и выпуклым одновременно, а также ограниченным константами  $C_1$  снизу и  $C_2$  сверху, или (в случае задачи на  $V_C$ ) должно иметь обобщенную вариацию  $|z_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |z_i - z_{i+1}| \leq C_2$ . После окончания работы программы PTIGR массив

$Z$  будет содержать найденное приближенное решение.

$AN2$  – выходной параметр – простая переменная, содержащая после окончания работы программы значение функционала невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|_{L_2}^2$  на найденном приближенном решении.

$ITER$  – выходной параметр – после завершения программы содержит число сделанных программой итераций метода условного градиента.

$DL$  – входной параметр – значение погрешности  $\delta^2$  задания правой части уравнения (1):  $\delta^2 \geq \|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2}^2$ ; программа PTIGR минимизирует функционал невязки  $\Phi(z)$  до этого значения.

$IMAX$  – входной параметр – максимально допустимое число итераций.

$C_1, C_2$  – входные параметры – константы  $C_1, C_2$ , ограничивающие решение или его вариацию.

$IC$  – входной параметр, определяющий множество корректности, на котором программа PTIGR минимизирует невязку  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|_{L_2}^2$ :

$IC = 1$  – множество монотонно невозрастающих функций, ограниченных константами  $C_1$  и  $C_2$  соответственно снизу и сверху;

$IC = 2$  – множество монотонно невозрастающих, выпуклых вверх функций, ограниченных снизу константой  $C_1$  и сверху – константой  $C_2$ ;

$IC = 3$  – множество выпуклых вверх функций, ограниченных константами  $C_1$  и  $C_2$ ; в этом случае минимизация фактически производится на множестве  $M'_{2C} = C\{T^{(j)}\}_{j=0}^n$  – выпуклой оболочке векторов

$$T_i^{(0)} = C_1;$$

$$T_i^{(j)} = \begin{cases} C_1 + 2(C_2 - C_1) \frac{i-1}{j-1}, & i < j, \\ C_1 + 2(C_2 - C_1), & i = j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ C_1 + 2(C_2 - C_1) \frac{n-i}{n-j}, & i > j; \end{cases} \quad (9)$$

$IC = -1$  – в этом случае должно быть задано  $C1 = 0$ , минимизация производится на множестве функций, удовлетворяющих условию  $V_a^b(z) + z(z) \leq C_2$  (см. § 1 гл. III).

$U$  – рабочий массив длиной не менее  $N * M + 2 * N + 2 * M$ .

$NU$  – входной параметр – длина рабочего массива  $U$ .

$IERR$  – выходной параметр – код завершения программы:

$IERR = 0$  – достигнуто значение функционала невязки  $\Phi(z)$  менее  $DL$  или сделано  $IMAX$  итераций метода условного градиента;

$IERR = 1$  – на очередном шаге минимизации невязка не уменьшалась, дальнейшее применение метода условного градиента бесполезно; после окончания в  $Z$  – очередное приближение, а в  $AN2$  – соответствующая ему невязка  $\Phi(z)$ ;

$IERR = 64$  – не хватает длины рабочего массива  $U$ , значения выходных параметров в этом случае не определены.

Вызываемые подпрограммы:  $PTIGR1$ ,  $PTIGR2$ ,  $PTICR0$ ,  $PTICR\phi$ ,  $PTICR1$ ,  $PTICR2$ ,  $PTICR3$ ,  $PTICR4$ ,  $PTICR5$ ,  $PTICR6$ .

Кратко опишем работу программы  $PTIGR$ . Операторы с 9 по 15 формируют начало рабочих массивов и проверяют достаточность длины рабочего массива  $U$  программы для размещения рабочих массивов. Затем обращением к программе  $PTICR\phi$  формируется матрица линейного оператора  $A$ , аппроксимирующего интегральный оператор уравнения (1). Наконец, программа  $PTIGR1$  осуществляет собственно минимизацию функционала  $\varphi(z)$ , аппроксимирующего функционал невязки  $\Phi(z)$  на соответствующем множестве  $M \downarrow C$ ,  $\check{M} \downarrow C$ ,  $\check{M}'_2 C$  или  $M_{VC} = \{z : |z_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |z_i - z_{i+1}| \leq C\}$ .

**2. Описание программы  $PTIGR1$ .** Поскольку эта программа может представлять самостоятельный интерес, опишем подробнее ее работу. Программа  $PTIGR1$  предназначена для минимизации методом условного градиента квадратичного функционала

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n A_{ij} z_j - u_i \right)^2 \quad (10)$$

на некоторых специальных множествах.

Форма обращения к программе:

`CALL PTIGR1 (A, Z\phi, U\phi, C1, C2, IC, N, M, ITER, DL, *ANGRD, IMAX, AN2, Z, U, U1, H, G, IERR)`

Здесь:

$A$  – матрица оператора  $A$  из  $R^n$  в  $R^m$ , входящая в выражение для минимизируемого функционала  $\varphi(z)$  (10).

$Z\phi$  – начальное приближение (массив длиной  $N$ ); начальное приближение должно быть допустимой точкой.

$U\phi$  – массив длиной  $M$  значений координат вектора  $u$ , входящего в (10).

$C_1, C_2, IC$  – параметры, определяющие множество, на котором минимизируется  $\varphi(z)$  ( $C_1, C_2$  – значения параметров  $C_1, C_2$ ):

$$IC = 1 \quad \{z: z_i \geq z_{i+1}, C_2 \geq z_i \geq C_1, i = 1, 2, \dots, n\};$$

$$IC = 2 \quad \{z: z_i \geq z_{i+1}, z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0, C_2 \geq z_i \geq C_1\};$$

$$IC = 3 \quad C\{T^{(j)}\}_{j=1}^n,$$

где  $T^{(j)}$  определяются формулами (9):

$$IC = -1, C_1 = 0 \quad \{z: |z_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |z_i - z_{i+1}| \leq C_2\}.$$

$N, M$  – соответственно параметры  $n, m$  в (10).

ITER – число сделанных программой PTIGR1 итераций.

DL – уровень, до которого программа PTIGR1 минимизирует функцию  $\varphi(z)$ , определяемую (10).

ANGRD – уровень выхода по градиенту:  $\|\text{grad } \varphi(z)\|^2 = 4\|A^*Az - A^*u\|_{Rm}^2$ , если квадрат нормы градиента становится меньше этого значения, программа прекращает свою работу.

IMAX – ограничение на число итераций, программа PTIGR1 не может сделать более IMAX итераций.

AN2 – значение функционала  $\varphi(z) = \|Az - u\|_{Rm}^2$  на найденном приближенном решении.

Z – найденное приближенное решение, при вызове подпрограммы PTIGR1 фактические параметры, соответствующие Z и Z $\emptyset$ , могут совпадать.

U – значение Az на найденном приближенном решении.

G, H – рабочие массивы длиной N.

U1 – рабочий массив длиной M.

IERR – код завершения программы:

IERR = 0 – нормальное окончание – достигнут уровень невязки или сделано IMAX итераций;

IERR = 1 – на очередном шаге невязка не уменьшилась.

Операторы с 12 по 16 последовательно производят следующие действия, обращаясь к соответствующим подпрограммам.

1. Начальное приближение Z $\emptyset$  пересылается в Z.

2. Вычисляется произведение матрицы оператора A на Z и записывается в U.

3. Вычисляется невязка  $\varphi(z) = \|Az - u\|_{Rm}^2$  на начальном приближении.

4. Вычисляется вектор-градиент функционала невязки  $2(A^*Az - A^*u) = g$  на начальном приближении.

5. Вычисляется квадрат нормы градиента  $\|g\|^2$ , а затем проверяется условие окончания работы программы и, если они не выполнены, то переходим к осуществлению итерационного процесса:

а) обращением к программе PTIGR2 вычисляется вершина H многогранника, определяемого значением параметра IC, в которой достигается минимальное значение линейного функционала  $(g, t) = \psi(t)$ ;

б) вычисляется вектор, направленный из найденной вершины в текущее приближенное решение, т.е. направление, противоположное направлению спуска;

```

0001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0002      DIMENSION U0(41),Z(41),U(41,260),Z0(41)
0003      EXTERNAL AK
0004      X1=0.
0005      X2=1.
0006      Y1=-2.
0007      Y2=2.
0008      N=41
0009      M=41
0010      IMAX=400
0011      IC=2
0012      DL=0.
0013      C1=0.
0014      C2=1.
0015      DO 1 J=1,N
0016      X=X1+(X2-X1)/(N-1.)*(J-1.)
0017      1 Z0(J)=1.-X*X
0018      CALL FTICR0(AK,U,X1,X2,Y1,Y2,N,M)
0019      CALL FTICR3(U,Z0,U0,N,M)
0020      DO 4 J=1,N
0021      Z(J)=0.
0022      4 CONTINUE
0023      CALL FTIGR(AK,U0,X1,X2,Y1,Y2,N,M,Z,AN,
*ITER,DL,IMAX,C1,C2,IC,U,41*260,IERR)
0024      PRINT 5,Z0,Z,DL,AN,ITER,IERR
0025      STOP
0026      5 FORMAT(15X,'ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ: '//'/
*
*      8(5F11.6/),F11.6//'/
*15X,'ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ: '//'/
*
*      8(5F11.6/),F11.6//'/
*10X,'КВАДРАТ ОШИБКИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ :',
*
*      D14.6/
*10X,'НЕВЯЗКА
*
*      D14.6/
*10X,'КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ
*
*      I14/
*10X,'ЗНАЧЕНИЕ IERR
*
*      I14)
0027      END

```

```

0001      FUNCTION AK(X,Y)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      AK=1./(1.+100.*(X-Y)**2)
0004      RETURN
0005      END

```

\*\*\*\*\* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ:

1.000000	0.999375	0.997500	0.994375	0.990000
0.984375	0.977500	0.969375	0.960000	0.949375
0.937500	0.924375	0.910000	0.894375	0.877500
0.859375	0.840000	0.819375	0.797500	0.774375



0.750000	0.724375	0.697500	0.669375	0.640000
0.609375	0.577500	0.544375	0.510000	0.474375
0.437500	0.399375	0.360000	0.319375	0.277500
0.234375	0.190000	0.144375	0.097500	0.049375
0.000000				

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:

0.988767	0.988767	0.988576	0.987790	0.986477
0.984712	0.981902	0.974724	0.963316	0.951637
0.939958	0.928279	0.916600	0.896694	0.876788
0.856882	0.836975	0.814705	0.791996	0.769288
0.746579	0.723870	0.701114	0.676169	0.647221
0.616290	0.581252	0.545292	0.508441	0.469801
0.430246	0.390691	0.351135	0.311580	0.272024
0.232469	0.192914	0.150570	0.108227	0.065883
0.023540				

КВАДРАТ ОШИБКИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ :	0.000000D+00
НЕВЯЗКА :	0.207510D-06
КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЯ :	400
ЗНАЧЕНИЕ IERR :	0

Р и с. 4.7

в) программой PTICR0 производится минимизация функционала невязки  $\varphi(z)$  на отрезке  $z - \lambda h$ , где  $\lambda \in [0, 1]$ ; результатом работы программы PTICR0 является величина шага  $\lambda$ ;

г) изменяется приближенное решение в соответствии с найденным шагом  $\lambda$ ;

д) снова вычисляются значение оператора на новом приближении, градиент в новой точке, значение невязки и квадрат нормы градиента;

е) производится проверка условий окончания работы программы: если условие окончания не выполнены, то проверяется, уменьшилось ли значение функционала невязки  $\varphi(z)$ , если не уменьшилось, то программа завершает свою работу с кодом завершения 1; в противном случае запоминается текущее значение невязки и продолжается итерационный процесс.

3. Описание программы PTIGR2. Программа PTIGR2 служит для выбора оптимальной вершины  $t_0$  соответствующего многогранника  $M_C$ , т.е. вершины, в которой достигается минимальное значение функционала  $(g, t)$ :

$$\psi(t_0) = (g, t_0) = \min_{t \in M_C} \psi(t) = \min_{t \in M_C} (g, t),$$

где  $g$  — заданный фиксированный вектор.

Форма обращения к программе:

CALL PTIGR2 (TOP, G, N, C1, C2, IC)

Здесь:

TOP — найденная оптимальная вершина (массив длины N) — результат работы программы.

$G$  – градиент функционала невязки  $g$  – фиксированный задаваемый вектор длины  $N$ .

$C_1, C_2$  – константы, значения которых  $C_1, C_2$  определяют множество  $M_C$ .

$IC$  – параметр, определяющий многогранник  $M_C$  (см. описание программы PTIGR1).

Поиск оптимальной вершины  $t_0$  среди вершин  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) осуществляется перебором. Координаты вершин  $T^{(j)}$  легко выписываются в явном виде, как это сделано в § 3 гл. III. При реализации перебора нет необходимости каждый раз явно вычислять координаты векторов  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) и величину скалярного произведения  $(g, T^{(j)})$ . Заметим, что достаточно сравнивать значения скалярных произведений  $(g, T^{(j)} - T^{(0)})$ : Координаты векторов  $T^{(j)} - T^{(0)}$  выписаны в формулах (6), (9), (12) гл. II и (3) гл. III.

В качестве тестового расчета предлагается использовать решение задачи (1) с ядром  $K(x, s)$ , определяемым (2), и значениями границ отрезков  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $[c, d] = [-2, 2]$ . Будем использовать точное решение задачи  $\bar{z}(s) = 1 - s^2$  и при решении некорректно поставленной задачи воспользуемся априорной информацией о монотонности и выпуклости этого решения. Размерности сеток по обоим переменным выберем равными 41 ( $n = m = 41$ ). В качестве правой части уравнения (1) воспользуемся значениями, вычисляемыми в соответствии с (3), таким образом, имеем точность задания правой части уравнения, равную нулю.

Применение для решения этой задачи программы PTIGR позволило найти приближенное решение  $z(s)$ , численные значения которых даны на рис. 4.7, содержащем также обращение к программе PTIGR. Значение невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  на найденном приближенном решении составило  $2,08 \times 10^{-7}$ , что соответствует относительной погрешности примерно 0.15% (по отношению к максимуму правой части). Всего для нахождения полученного решения потребовалось 400 итераций.

## § 6. Описание программы решения

некорректно поставленных задач на специальных множествах.

Метод проекций сопряженных градиентов

Метод, описанный в § 2 гл. 3 для решения интегрального уравнения (1) на множествах монотонных ограниченных функций  $Z \downarrow_C$ , монотонных выпуклых  $Z \downarrow$  и выпуклых неотрицательных функций, основанный на применении метода проекции сопряженных градиентов для минимизации функционала невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|_{L_2}^2$  на соответствующем множестве, реализован в виде программ PTILR, PTILR1, PTILR $\phi$ , PTILR3, PTILR5, PTILR6, PTILR7, PTILRA, PTILRB.

1. Описание программы PTILR. Головная программа – PTILR. Форма обращения к ней:

CALL PTILR (AK, U $\phi$ , A, B, C, D, N, M, Z, AN2, DL, ITER,  
\* IMAX, C2, IC, U, NU, IERR)

Здесь:

AK(X, S) – подпрограмма-функция вычисления ядра  $K(x, s)$  уравнения (1).

Uφ – входной параметр – массив значений правой части  $u_\delta$  уравнения (1) на равномерной сетке  $\{x_i\}_{i=1}^m$  на отрезке  $[c, d]$ ,  $x_1 = c$ ,  $x_m = d$ , состоящей из M точек.

A, B, C, D – входные параметры – соответственно величины  $a, b, c, d$  уравнения (1).

N – входной параметр – размерность равномерной сетки  $\{s_j\}_{j=1}^n$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $s_1 = a$ ,  $s_n = b$ , на которой ищется неизвестная функция  $z(s)$ .

M – входной параметр – размерность сетки  $\{x_i\}_{i=1}^m$ , на которой задана правая часть уравнения (1).

Z – входной и выходной параметр. При обращении к программе PTILR в Z должно быть задано начальное приближение (массив из N чисел), начальное приближение должно быть допустимой точкой, т.е. монотонным, выпуклым или монотонным и выпуклым одновременно, неотрицательным, а также в случае множества  $Z \downarrow_C$  ( $IC = 1$ ) оно должно быть ограничено сверху константой  $C_2$ . После окончания работы программы PTILR массив Z будет содержать найденное приближенное решение уравнения (1).

AN2 – выходной параметр – содержит после окончания работы программы значение функционала невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  на найденном приближенном решении.

DL – входной параметр – значение погрешности  $\delta^2$  задания правой части уравнения (1):  $\delta^2 \geq \|u_\delta - \bar{u}\|^2$ , программа PTILR минимизирует функционал  $\Phi(z)$  до этого значения.

ITER – выходной параметр – число сделанных программой PTILR больших циклов (число изменений активных ограничений).

IMAX – входной параметр – максимально допустимое число больших циклов.

C2 – входной параметр – константа, значение которой  $C_2$ , ограничивает решение сверху в случае, когда оно ищется на множестве  $Z \downarrow_C$  ( $IC = 1$ ).

IC – входной параметр, определяющий множество, на котором программа PTILR минимизирует функционал невязки:

IC = 1 – множество неотрицательных, монотонно убывающих, ограниченных сверху константой  $C_2$  функций ( $Z \downarrow_C$ );

IC = 2 – множество неотрицательных выпуклых вверх функций ( $\check{Z}$ );

IC = 3 – множество неотрицательных, монотонно убывающих, выпуклых вверх функций ( $Z \downarrow$ ).

U – рабочий массив длиной не менее  $nm + 5n^2 + 5n + \max\{n, m\} + 1$ , если  $IC = 1$ , то длина рабочего массива не менее  $nm + 5n^2 + 8n + \max\{n, m\} + 4$ .

NU – входной параметр – длина рабочего массива U.

IERR – выходной параметр – код завершения:

IERR = 0 – найдена точка минимума функционала невязки  $\Phi(z)$  на соответствующем множестве (выход на шаг 6 в алгоритме § 2 гл. III);

IERR = 1 – достигнуто значение функционала невязки меньше заданного значения погрешности DL;

IERR = 2 – найдена точка минимума функционала невязки  $\Phi(z)$  (норма градиента функционала равна машинному нулю);

IERR = 3 — сделано IMAX больших циклов (изменений множества активных ограничений);

IERR = 64 — не хватает длины рабочего массива U, значения всех выходных параметров не определены;

IERR = 65 — ошибка в задании множества корректности, задано IC либо меньшее 1, либо большее 3, либо при IC = 1 задано значение C2 = 0.0. Значения всех выходных параметров в этом случае не определены.

Вызываемые подпрограммы: PTILR1, PTILR2, PTILR3, PTILR4, PTILR5, PTILR6, PTILR7, PTILRA, PTILRB, PTICR0, PTICR1, PTICR2, PTICR3, PTICR5, PTICR6, PTILR0.

Краткое описание работы программы PTILR. Операторы с 9 по 26 формируют начала рабочих массивов и проверяют достаточность длины рабочего массива U программы для размещения рабочих массивов. Обращением к программе PTICR0 формируется матрица линейного оператора, действующего из  $R^n$  в  $R^m$ , аппроксимирующего интегральный оператор уравнения (1). Затем программа PTILRA преобразует функционал невязки  $\varphi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  к виду  $\varphi(z) = (z, Qz) + (d, z) + e$ , т.е. формирует матрицу  $Q = A^*A$  и вектор  $d = 2A^*u_\delta$ . Программа PTILRB формирует матрицу  $F$  и вектор  $g$  ограничений  $Fz \leq g$  в соответствии со значением параметра IC, определяющего множество корректности.

Основа метода реализована в виде программы PTILR1, служащей для минимизации функционала невязки  $(z, Qz) + (d, z) + e$  при наличии ограничений вида  $Fz \leq g$ . Невязка AN2, выдаваемая программой PTILR1, вычисляется в пространстве  $R^m$ , и поэтому после обращения к PTILR1 она нормируется в соответствии с метрикой  $L_2 [c, d]$ .

Вход PTILRE, служащий для продолжения счета по программе, позволит избежать при повторном обращении к алгоритму формирования матриц оператора и ограничений и преобразования функционала невязки к виду  $(z, Qz) + (d, z) + e$ . При этом вместо обращения к программе PTILR1 происходит обращение к ее входу PTILR2.

2. Описание программы PTILR1. Поскольку основой реализации алгоритма является, как уже отмечалось, программа PTILR1, представляющая самостоятельный интерес, то приведем краткое ее описание. Программа PTILR1 служит для минимизации квадратичной функции  $\|Az - u\|_{R^m}^2 = (z, Qz) + (d, z) + e$  при наличии ограничений вида  $Fz \leq g$ . Минимизация проводится методом проекции сопряженных градиентов, как это описано в § 2 гл. III.

Форма обращения:

CALL PTILR1 (M, MF, MASK, A, AJ, F, P, U0, PI, G, GR,  
\* W, P1, WORK, IMAX, ITER, Q, X, D, N, NN, AN2, DL,  
\* ANGRD, IEND)

Здесь:

M — число точек сетки, на которой задается правая часть  $u$  (в случае WORK = .FALSE. можно не задавать).

MF — целая рабочая переменная — число активных ограничений.

MASK — рабочий массив длиной NN — число ограничений; содержит признаки активности ограничений.

$A$  – матрица  $M * N$  оператора  $A$  (в случае  $WORK = .FALSE.$  можно не задавать).

$AJ$  – рабочий массив длиной не менее  $NN * N$ .

$F$  – матрица ограничений размерности  $NN * N$ .

$P$  – рабочий массив длиной не менее  $NN * N$ .

$U\phi$  – правая часть уравнения (1) (в случае  $WORK = .FALSE.$  можно не задавать).

$PI$  – рабочий массив длиной не менее  $N * N$ .

$G$  – вектор ограничений  $g$  длиной  $NN$ .

$GR$  – рабочий массив длиной не менее  $N$ .

$W$  – рабочий массив длиной не менее  $\max\{NN, M, N\}$ .

$P1$  – рабочий массив длиной не менее  $N$ .

$WORK$  – логическая переменная, определяющая режим вычисления невязок:

$WORK = .TRUE.$  – заданы входные параметры  $M, A, U\phi, DL$ ; на каждом большом цикле производится вычисление невязки  $\varphi(z) = \|Az - u\|_{R^m}^2$  и ее сравнение с заданной величиной  $DL$ ;

$WORK = .FALSE.$  – вычисления невязки не производится (величины  $M, A, U\phi, DL$  при обращении можно не задавать).

$IMAX$  – максимальное допустимое число больших циклов.

$ITER$  – число сделанных больших циклов.

$Q$  – матрица  $Q$  функционала невязки  $\varphi(z) = (z, Qz) + (d, z) + e$ .

$X$  – начальное приближение; после завершения программы массив  $X$  длины  $N$  содержит найденное приближенное решение.

$D$  – вектор  $d$  функционала  $\varphi(z) = (z, Qz) + (d, z) + e$  длины  $N$ .

$N$  – размерность пространства решений.

$NN$  – число ограничений.

$AN2$  – содержит после окончания работы программы значение функционала невязки  $\varphi(z) = \|Az - u\|_{R^m}^2$  на найденном приближенном решении в случае задания параметра  $WORK = .TRUE.$

$DL$  – предельный уровень минимизации по невязке; когда  $\varphi(z) = \|Az - u\|^2$  становится менее  $DL$ , программа прекращает свою работу.

$ANGRD$  – уровень выхода по градиенту  $\|\text{grad}\varphi(z)\|^2 = \|2Qz + d\|^2$ , если квадрат нормы градиента становится менее этого значения, то программа прекращает свою работу.

$IEND$  – код завершения программы:

$IEND = 0$  – найдена точка минимума  $\varphi(z)$  на рассматриваемом множестве (выход на шаг 6 алгоритма § 2 гл. III);

$IEND = 1$  – достигнуто значение функционала  $\varphi(z)$ , меньшее  $DL$ ;

$IEND = 2$  – достигнуто значение нормы градиента, меньшее  $ANGRD$ ;

$IEND = 3$  – сделано  $IMAX$  больших циклов.

Программа имеет вход  $PTILR2$ , предназначенный для повторного обращения для продолжения минимизации. Для этого необходимо обратиться ко входу  $PTILR2$ , определив все необходимые входные параметры, а также восстановив значения параметров  $MF$  и  $MASK$ . При этом удастся избежать процедуры накопления активных ограничений при помощи фиктивных шагов, требующих обращение матрицы.

Обращаем внимание на то, что параметры  $DL$  и  $AN2$ , характеризующие невязку, имеют для программ  $PTILR$  и  $PTILR1$  различный смысл.

```

0001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0002      DIMENSION U0(41), Z(41), U(41,260), Z0(41)
0003      EXTERNAL AK
0004      X1=0.
0005      X2=1.
0006      Y1=-2.
0007      Y2=2.
0008      N=41
0009      M=41
0010      IMAX=100
0011      IC=1
0012      DL=0.
0013      C2=1.
0014      DO 1 J=1,N
0015      X=X1+(X2-X1)/(N-1.)*(J-1.)
0016      1  Z0(J)=1.-X*X
0017      CALL PTICR0(AK,U,X1,X2,Y1,Y2,N,M)
0018      CALL PTICR3(U,Z0,U0,N,M)
0019      DO 4 J=1,N
0020      Z(J)=0.5
0021      4  CONTINUE
0022      CALL PTILR(AK,U0,X1,X2,Y1,Y2,N,M,Z,AN,
*DL,ITER,IMAX,C2,IC,U,41*260,IERR)
0023      PRINT 5,Z0,Z,DL,AN,ITER,IERR
0024      STOP
0025      5  FORMAT(15X,'ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ: '//'. '//
*          8(5F11.6/),F11.6//'. '//
*15X,'ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ: '//'. '//
*          8(5F11.6/),F11.6//'. '//
*10X,'КВАДРАТ ОШИБКИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ :',
*          D14.6/
*10X,'НЕВЯЗКА
*          :',
*          D14.6/
*10X,'КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ
*          :',
*          I14/
*10X,'ЗНАЧЕНИЕ IERR
*          :',
*          I14)
0026      END

```

```

0001      FUNCTION AK(X,Y)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      AK=1./(1.+100.*(X-Y)**2)
0004      RETURN
0005      END

```

\*\*\*\*\* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ:

1.000000	0.999375	0.997500	0.994375	0.990000
0.984375	0.977500	0.969375	0.960000	0.949375
0.937500	0.924375	0.910000	0.894375	0.877500
0.859375	0.840000	0.819375	0.797500	0.774375
0.750000	0.724375	0.697500	0.669375	0.640000

0.609375	0.577500	0.544375	0.510000	0.474375
0.437500	0.399375	0.360000	0.319375	0.277500
0.234375	0.190000	0.144375	0.097500	0.049375
0.000000				

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:

1.000000	1.000000	0.995091	0.995091	0.995091
0.980707	0.980707	0.959777	0.959777	0.956411
0.949780	0.905914	0.905914	0.902689	0.897000
0.834447	0.834447	0.827738	0.823042	0.745504
0.745504	0.735822	0.735822	0.620072	0.620072
0.609797	0.591852	0.591852	0.591852	0.377656
0.377656	0.377656	0.377656	0.366507	0.351647
0.166467	0.166467	0.155991	0.108782	0.044609
0.000000				

КВАДРАТ ОШИБКИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ : 0.000000D+00  
 НЕВЯЗКА : 0.397428D-13  
 КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ : 100  
 ЗНАЧЕНИЕ IERR : 3

Р и с. 4.8

Использование программы PTILR1 возможно также при решении задачи (1) при наличии информации о положении, например, экстремумов искомой функции. Для этого достаточно в программе PTILR использовать другую программу PTILRB формирования матрицы  $F$  и вектора ограничений  $g$ . При этом следует следить, чтобы в любой допустимой точке строки матрицы активных ограничений были линейно независимы. В простейшем случае изменения сводятся к перемене знаков у соответствующих строк матрицы ограничений. Приведем для примера программу PTILRB для случая задачи на множестве функций, неубывающих при  $a \leq s \leq x_0$  и невозрастающих при  $x_0 \leq s \leq b$ . Предполагается, что точка  $x_0$  принадлежит сетке, на которой ищется решение и задается в COMMON-блоке своим номером  $J\emptyset$ .

```

SUBROUTINE PTILRB (F, G, N, NN, ITASK, C, IERR)
COMMON J\emptyset
C * ПАРАМЕТРЫ ITASK, C ФИКТИВНЫЕ
DIMENSION F(NN, N), G(NN)
REAL * 8 F, G, C
INTEGER N, NN, ITASK, IERR, L, I, J\emptyset
C * ФОРМИРУЕМ NN – ЧИСЛО ОГРАНИЧЕНИЙ
NN = N - 1
C * ЗАНУЛЯЕМ МАТРИЦУ
CALL PTICR2(F, 0.0, N * NN)
C * ФОРМИРУЕМ ВЕКТОР ОГРАНИЧЕНИЙ
CALL PTICR2(G, 0.0, NN)

```

## C \* ФОРМИРУЕМ МАТРИЦУ ОГРАНИЧЕНИЙ

```
DO 11 I = 2, J0
F(I - 1, I - 1) = 1.0
F(I - 1, I) = -1.0
1 1 CONTINUE
L = N - 1
DO 12 I = J0, L
F(I, I) = -1.0
F(I, I + 1) = 1.0
12 CONTINUE
IERR = 0
RETURN
END.
```

В качестве тестового расчета предлагается использовать расчет с помощью программы PTILR задачи (1) с ядром (2) ( $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -2$ ,  $d = 2$ ) и точным решением  $\bar{z}(s) = 1 - s^2$ . Значения  $n$ ,  $m$  возьмем равными 41. Правая часть выбирается в соответствии с формулой (3). На рис. 4.8 приведена программа-обращение, реализующая решение этой задачи с использованием априорной информации о монотонном убывании искомой функции и ее ограниченности сверху константой  $C_2 = 1$ . Там же приведены результаты – приближенное решение  $z(s)$ .

Отметим, что решение задачи (1) с помощью программы PTILR требует неоднократного обращения матрицы активных ограничений, что требует значительных затрат машинного времени. Кроме того, задание "неудачного" начального приближения (на ребре малой размерности) может привести к необходимости накопления активных ограничений, требующего фиктивных шагов, на каждом из которых обращается матрица активных ограничений. Тем самым для задач большой размерности применение программы PTILR может оказаться неэффективным.

### § 7. Описание программы решения некорректно поставленных задач на специальных множествах.

#### Метод сопряженных градиентов с проецированием на множество векторов с неотрицательными компонентами

Метод решения интегрального уравнения (1) на множествах монотонных ( $Z \downarrow$ ), выпуклых ( $Z$ ) неотрицательных функций, основанный на переходе к новым переменным, как это описано в § 3 гл. III, реализован в виде программ PTISR, PTISR1, PTISR2, PTISR3, PTISR4.

1. Описание программы PTISR. Головная программа -- PTISR. Форма обращения к ней:

```
CALL PTISR(AK, U0, A, B, C, D, N, M, Z, AN2, ITER,
* DL, IMAX, IC, U, NU, IERR)
```



Здесь:

AK(X, S) – подпрограмма-функция вычисления ядра  $K(x, s)$  уравнения (1).

U $\emptyset$  – входной параметр – массив значений правой части уравнения (1) на равномерной сетке  $\{x_i\}_{i=1}^m$  на отрезке  $[c, d]$ ,  $x_1 = c$ ,  $x_m = d$ , состоящей из M точек.

A, B, C, D – входные параметры – соответственно величины  $a, b, c, d$  уравнения (1).

N – входной параметр – размерность  $n$  равномерной сетки  $\{s_j\}_{j=1}^n$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $s_1 = a$ ,  $s_n = b$ , на которой ищется неизвестная функция  $z(s)$ .

M – входной параметр – размерность сетки  $\{x_i\}_{i=1}^m$ , на которой задана правая часть уравнения (1).

Z – входной и выходной параметры. При обращении к программе PTISR должен содержать начальное приближение к экстремали функционала невязки (массив из N чисел). Начальное приближение должно быть обязательно допустимой точкой, т.е. монотонным, выпуклым или монотонным и выпуклым одновременно, а также неотрицательным. После окончания работы программы PTISR массив Z будет содержать найденное приближенное решение.

AN2 – выходной параметр – простая переменная, содержащая после окончания работы программы значение функционала невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|_{L_2}^2$  на найденном приближенном решении Z.

ITER – выходной параметр – после завершения программы содержит число сделанных программой PTISR итераций метода проекций сопряженных градиентов.

DL – входной параметр – значение погрешности  $\delta^2$  задания правой части уравнения (1); программа PTISR минимизирует функционал невязки  $\Phi(z)$  до этого значения.

IMAX – входной параметр – максимально допустимое число итераций.

IC – входной параметр, определяющий множество, на котором производится минимизация функционала невязки:

IC = 1 – множество монотонно невозрастающих, неотрицательных функций;

IC = 2 – множество монотонно невозрастающих, выпуклых вверх неотрицательных функций;

IC = 3 – множество выпуклых вверх, неотрицательных функций;

IC = 4 – множество монотонно невозрастающих, выпуклых вниз, неотрицательных функций;

IC = 5 – множество выпуклых вниз функций, неотрицательных на краях рассматриваемого отрезка (в точках  $a, b$ ).

U – рабочий массив длины не менее  $N * M + 3 * N + 2 * M$ .

NU – выходной параметр – длина рабочего массива U.

IERR – входной параметр – код завершения программы:

IERR = 0 – найдена точка минимума функционала невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  на соответствующем множестве (норма градиента функционала равна машинному нулю или найден минимум в текущем подпространстве и никакое ограничение нельзя исключить из множества активных);

IERR = 1 функционал невязки  $\Phi(z)$  достиг значения меньшего DL или сделано IMAX итераций метода проекции сопряженных градиентов;

IERR = 2 -- невязка  $\Phi(z)$  не уменьшилась на очередном шаге, дальнейшее применение метода проекции сопряженных градиентов бесполезно: по окончании программы PTISR в Z очередное приближение к точке минимума;

IERR = 64 — не хватает длины рабочего массива, в этом случае значения всех выходных параметров не определены;

IERR = 65 — возникает из-за накопления погрешностей округления, в этом случае значениям выходных параметров доверять нельзя. Вызываемые подпрограммы: PTISR1, PTISR2, PTISR3, PTISR4, PTICRO, PTICR0, PTICR1, PTICR2, PTICI2, PTICR3, PTICR4, PTICR5, PTICR6, PTICR7, PTICR8, PTICR9.

Кратко опишем работу подпрограммы PTISR. Операторы с 9 по 19 формируют начала рабочих массивов и проверяют достаточность длины рабочего массива U программы PTISR. Затем обращением к программе PTISR0 формируется матрица A линейного оператора, аппроксимирующего интегральный оператор уравнения (1). Вслед за этим программа PTISR2 преобразует матрицу A и начальное приближение Z в соответствии с заменой переменных, переводящей задачу минимизации в множество  $\Pi^+$  (см. § 3 гл. III). Программа PTISR1 осуществляет минимизацию функционала невязки  $\varphi(x) = \|Ax - u\|_{\mathbb{R}^n}^2$  на множестве  $\Pi^+$  векторов с неотрицательными компонентами методом проекции сопряженных градиентов. Заметим, что в программе PTISR невязка вычисляется в аналоге интегральной метрики  $L_2[c, d]$ , а в программе PTISR1 эта величина вычисляется в обычной евклидовой метрике  $n$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^n$ . После завершения минимизации экстремальная точка  $x$  подвергается обратному преобразованию  $z = Tx$  из  $\Pi^+$  в множество, определяемое значением параметра IC. Это преобразование осуществляется программой PTISR3.

Вход PTISRE служит для повторного обращения к программе и для продолжения счета. В этом случае нет необходимости заново формировать матрицу A и осуществлять ее преобразование и преобразование начального приближения. Матрица A в преобразованном виде сохраняется в первых  $N * M$  элементах рабочего массива U. Для сохранения текущего приближения  $x \in \Pi^+$  используется 26-й оператор, пересылающий его в следующие N элементов массива U. Таким образом, для продолжения счета достаточно сохранить и восстановить первые  $N * (M + 1)$  элементов рабочего массива U.

**2. Описание программы PTISR1.** Основой реализации алгоритма является программа PTISR1, служащая в общем случае для минимизации сглаживающего функционала

$$M^\alpha[z] = \|Az - u\|_{\mathbb{R}^m}^2 + \alpha(\|z\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \rho \|z'\|_{\mathbb{R}^{n-1}}^2)$$

на множестве  $\Pi^+$  векторов с неотрицательными компонентами  $z_i \geq 0$  (в комплексе с программой PTISR программа PTISR1 используется для минимизации невязки, т.е.  $\alpha = 0$ ) методом проекции сопряженных градиентов.

Форма обращения к программе:

CALL PTISR1(A, Z0, U0, N, M, ITER, DL, ANGRD, IMAX, AN2,  
\* ALF, RO, Z, U, U1, H, G, IPLUS, IERR)

Здесь:

A матрица оператора  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  – массив размерности  $M * N$ .

Z0 начальное приближение, все компоненты начального приближения должны быть неотрицательными – массив длиной N.

U0 – правая часть уравнения – массив длиной M.

N, M – размерности пространств.

ITER число сделанных программой итераций.

DL уровень выхода по невязке  $\varphi(z) = \|Az - u\|_{\mathbf{R}^m}^2$ : как только  $\varphi(z)$  становится меньше этого значения, программа прекращает работу с кодом ответа IERR = 1.

ANGRD -- уровень выхода по градиенту; программа прекращает работу с IERR = 1, если  $\|\text{grad } M^\alpha[z]\|_{\mathbf{R}^n}^2$  становится меньше этой величины.

IMAX -- максимально допустимое число итераций.

AN2 -- значение невязки  $\varphi(z)$  на найденном приближенном решении.

ALF -- значение параметра регуляризации в  $M^\alpha[z]$ .

RO значение веса  $\rho$  в выражении для  $M^\alpha[z]$ .

Z – найденное приближенное решение – массив длиной N.

U – значение  $Az \in \mathbf{R}^m$  на приближенном решении – массив длиной M.

U1 – рабочий массив длиной M.

H, G, IPLUS рабочие массивы длиной N.

IERR – код завершения программы:

IERR = 0 – найден “точный” минимум функционала  $M^\alpha[z]$  на  $\Pi^+$ ;

IERR = 1 сделано IMAX итераций, или достигнуто значение невязки DL, или достигнуто значение квадрата нормы градиента меньше ANGRD:

IERR = 2 – на очередном шаге невязка не уменьшилась;

IERR = 65 вычисленный шаг вдоль очередного направления спуска получился отрицательным (этот случай возможен только при накоплении погрешностей округления).

Кратко опишем работу программы PTISR1. Операторы с 13 по 23 последовательно производят следующие действия, обращаясь к соответствующим подпрограммам:

1) начальное приближение пересылается в Z;

2) вычисляется значение U оператора A на начальном приближении Z;

3) вычисляется невязка и добавляется к ней значение стабилизатора;

4) вычисляется градиент невязки и к нему добавляется градиент стабилизатора.

Операторы с 27 по 45 формируют (или изменяют в зависимости от значения признака JCH) множество активных ограничений и вычисляют размерность текущей грани.

Затем обращением к программе PTICR7 вычисляется квадрат нормы проекции градиента на множество активных ограничений (на текущую грань). Операторы с 47 по 56 изменяют и формируют счетчик итераций на текущей грани и по нему определяют достижимость точного минимума этой грани. Если минимум на грани достигнут, то множество активных

ограничений формируется заново, и если его размерность при этом не изменяется, то считается, что достигнут точный минимум, в противном случае вычисления продолжаются с оператора 56. Операторы с 57 по 61 формируют направление спуска в соответствии со значением признака перехода на другую грань ИСН. Затем операторы с 62 по 72 находят наибольший возможный шаг, не выводящий из  $\Pi^+$ , и номер нового возможного ограничения. Последовательно осуществляются: одномерная минимизация программой PTICRO, переход в новую точку, вычисление невязки, сглаживающего функционала и их градиентов, устанавливаются необходимые признаки и проверяются условия окончания работы программы. После запоминания невязки управление возвращается на начало итераций оператор 24.

Программа PTISR2 служит для преобразования матрицы оператора  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  и начального приближения при переходе в  $\Pi^+$ .

Форма обращения:

CALL PTISR2(A, Z, N, M, IC, S)

Здесь:

A -- матрица оператора.

Z - начальное приближение.

N, M - размерности пространств.

IC - параметр, определяющий множество корректности M, имеющий то же значение, что и при обращении к программе PTISR, S<sub>i</sub> - рабочий массив длины N.

Программа PTISR3 служит для возврата из  $\Pi^+$  в множество корректности, определяемое параметром IC.

Форма обращения:

CALL PTISR3(Z, N, IC, Y)

Здесь:

Z - преобразуемый вектор длины N,

Y - рабочий массив длины N.

Программы PTISR2 и PTISR3 используют при работе программу-функцию PTISR4, вычисляющую элементы матрицы перехода  $T_i^{(j)}$  из  $\Pi^+$  в множество, определяемое параметром IC (см. § 3 гл. III). Форма обращения:  $S = \text{PTISR4}(I, J, IC, N)$ .

Описанные в настоящем параграфе программы могут быть модифицированы для решения уравнения (1) в случаях, когда об искомом решении имеется информация о кусочной монотонности или выпуклости, причем точки экстремумов или перегибов известны. В этом случае задачу минимизации функционала невязки на соответствующем множестве можно также свести к задаче минимизации квадратичной функции  $\varphi(z)$  на множестве  $\Pi^+$ .

Пусть, например, известно, что искомая функция является кусочно-монотонной с экстремумами, расположенными в точках  $s_i^3$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), либо кусочно-выпуклой с  $l$  точками перегиба  $s_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ). Будем считать, что  $a < s_1^3 < s_2^3 < \dots < s_l^3 < b$ , аналогично  $a < s_1^2 < \dots < s_l^2 < b$ . Не ограничивая общности, будем считать, что на участке  $(a, s_1^3)$  искомая

```

0001          SUBROUTINE PTISR5(A,Z,N,M,IC,L,ISL)
C * ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА A(M,N) И
C * НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ
C * НА КУСОЧНО-МОНОТОННЫХ И ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ
0002          DIMENSION A(M,N),Z(N),ISL(N)
0003          REAL*8 A,Z,R
0004          INTEGER N,M,L,I,J,ISL,J0,IC
0005          J0=1
0006          R=1.
0007          DO 1 J=1,N
0008             IF (J0.EQ.L+1) GOTO 2
0009             IF (J.NE.ISL(J0)) GOTO 2
0010             J0=J0+1
0011             R=-R
0012          2  CONTINUE
0013             Z(J)=R*Z(J)
0014             DO 3 I=1,M
0015                A(I,J)=R*A(I,J)
0016          3  CONTINUE
0017          1  CONTINUE
0018          RETURN
0019          END

```

Р и с. 4.9

```

0001          SUBROUTINE PTISR6(Z,N,IC,L,ISL)
C * ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ
C * КУСОЧНО-МОНОТОННЫХ (ВЫПУКЛЫХ) ФУНКЦИЙ
0002          DIMENSION Z(N),ISL(N)
0003          REAL*8 Z,R
0004          INTEGER N,L,I,J,ISL,J0,IC
0005          J0=1
0006          R=1.
0007          DO 1 J=1,N
0008             IF (J0.EQ.L+1) GOTO 2
0009             IF (J.NE.ISL(J0)) GOTO 2
0010             J0=J0+1
0011             R=-R
0012          2  CONTINUE
0013             Z(J)=R*Z(J)
0014          1  CONTINUE
0015          RETURN
0016          END

```

Р и с. 4.10

функция не возрастает, либо, в случае кусочно-выпуклой функции  $z(s)$  выпукла кверху на  $(a, s_1^n)$ .

Для решения задачи (1) на множествах кусочно-монотонных или кусочно-выпуклых функций в число формальных параметров программы PTISR необходимо дополнительно ввести параметры:

L – входной параметр, число экстремумов или точек перегиба искомой функции;

```

0001      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
0002      DIMENSION U0(41), Z(41), U(41,260), Z0(41)
0003      EXTERNAL AK
0004      X1=0.
0005      X2=1.
0006      Y1=-2.
0007      Y2=2.
0008      N=41
0009      M=41
0010      IMAX=400
0011      IC=3
0012      DL=0.
0013      DO 1 J=1,N
0014      X=X1+(X2-X1)/(N-1.)*(J-1.)
0015      1 Z0(J)=4.*X*(1.-X)
0016      CALL PTICR0(AK,U,X1,X2,Y1,Y2,N,M)
0017      CALL PTICR3(U,Z0,U0,N,M)
0018      DO 4 J=1,N
0019      Z(J)=0.
0020      4 CONTINUE
0021      CALL PTISR(AK,U0,X1,X2,Y1,Y2,N,M,Z,AN,
0022      *ITER,DL,IMAX,IC,U,41*260,IERR)
0023      PRINT 5,Z0,Z,DL,AN,ITER,IERR
0024      STOP
0025      5 FORMAT(15X,' ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ: '//'. ' /
0026      *      8(5F11.6/),F11.6//'. ' /
0027      *15X,' ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ: '//'. ' /
0028      *      8(5F11.6/),F11.6//'. ' /
0029      *10X,' КВАДРАТ ОШИБКИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ :',
0030      *      D14.6/
0031      *10X,' НЕВЯЗКА
0032      *      :',
0033      *      D14.6/
0034      *10X,' КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИИ
0035      *      :',
0036      *      I14/
0037      *10X,' ЗНАЧЕНИЕ IERR
0038      *      :',
0039      *      I14)
0040      END

```

```

0001      FUNCTION AK(X,Y)
0002      REAL*8 AK,X,Y
0003      AK=1./(1.+100.*(X-Y)**2)
0004      RETURN
0005      END

```

\*\*\*\*\* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \*\*\*\*\*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ:

0.000000	0.097500	0.190000	0.277500	0.360000
0.437500	0.510000	0.577500	0.640000	0.697500
0.750000	0.797500	0.840000	0.877500	0.910000
0.937500	0.960000	0.977500	0.990000	0.997500
1.000000	0.997500	0.990000	0.977500	0.960000
0.937500	0.910000	0.877500	0.840000	0.797500
0.750000	0.697500	0.640000	0.577500	0.510000

0.437500 0.360000 0.277500 0.190000 0.097500  
 0.000000

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ:

0.000000	0.097502	0.189998	0.277498	0.360000
0.437501	0.510001	0.577501	0.639999	0.697499
0.749999	0.797500	0.840000	0.877500	0.910000
0.937500	0.960000	0.977500	0.990000	0.997500
1.000000	0.997500	0.990000	0.977500	0.960000
0.937500	0.910000	0.877500	0.840000	0.797500
0.749999	0.697499	0.639999	0.577501	0.510001
0.437501	0.360000	0.277498	0.189998	0.097502
0.000000				

КВАДРАТ ОШИБКИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ : 0.000000D+00  
 НЕВЯЗКА : 0.946452D-18  
 КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЯ : 88  
 ЗНАЧЕНИЕ IERR : 0

Рис. 4.11

ISL – входной целый массив, содержащий номера точек экстремума или перегиба искомой функции на равномерной сетке  $\{s_i\}_{i=1}^n$ ,  $s_1 = a$ ,  $s_n = b$ . Номера точек в массиве ISL должны строго возрастать.

Значения и смысл всех остальных параметров сохраняется. При IC = 1 ищется кусочно-монотонное решение, а при IC = 3 – кусочно-выпуклое. В программу PTISR должны быть внесены следующие изменения.

1. После обращения к программе PTISR2 (оператор 20) необходимо обратиться к программе PTISR5:

CALL PTISR5(R(NA), Z, N, M, IC, L, ISL)

Текст программы PTISR5 приведен на рис. 4.9.

2. По окончании работы программы, перед обращением к программе PTISR3 (оператор 26) необходимо обратиться к программе PTISR6:

CALL PTISR6(Z, N, IC, L, ISL)

Текст программы PTISR6 приведен на рис. 4.10.

3. Непосредственно перед обращением к программе PTISR1 (оператор 24) произвести присваивания

N1 = 2

IF (IC.EQ.1) N1 = 1

N2 = N - 1

4. В программе PTISR1 операторы 29 и 64 заменить соответственно на

DO 4 N1, N2

и

DO 10 N1, N2.

5. В начале программ PTISR и PTISR1 вставить описание COMMON – блока

COMMON N1, N2.

В качестве тестового расчета предлагается использовать решение задачи (1) с ядром (2) и значениями границ интервалов  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -2$ ,  $d = 2$ . Точное решение задачи примем равным  $\bar{z}(s) = 4s(1 - s)$ . Будем использовать априорную информацию о выпуклости этого решения. В качестве правой части уравнения воспользуемся значениями, вычисленными в соответствии с (3). Точность задания правой части  $\delta^2$  будем иметь в этом случае равной нулю.

Применение для решения такой задачи программы PTISR позволяет найти приближенное решение  $z(s)$ , числовые значения которого и программа-обращение помещены на рис. 4.11. Значение невязки  $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$  на найденном приближенном решении составляет  $9,46 \times 10^{-19}$ , что соответствует относительной погрешности примерно  $5 \times 10^{-9}\%$  (по отношению к максимуму правой части). Все для нахождения полученного решения потребовалось 88 итераций. В качестве начального приближения использовались функции  $z^{(0)}(s) \equiv 0$ .



**I. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма  
1-го рода методом Тихонова с преобразованием уравнений  
Эйлера к трехдиагональному виду**

```

0001      SUBROUTINE PTIMR( AK,U0,A,B,C,D,N,M,Z,
          *AN2,DL,H,C1,IMAX,ALFA,U,NU,IERR,AMU,
          *C2,ALP,EPF)
C * ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
C * ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C * ТИХОНОВА С ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗА-
C * ЦИИ ПО ПРИНЦИПУ ОБОБЩЕННОЙ НЕВЯЗКИ
C * С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
C * К ДВУХДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N,M,IERR,IMAX,NAK,NC,NB,NS1,NS2
0004      INTEGER NP1,NP2,NU1,NU2,NA,NG,NAL,NBT
0005      INTEGER NOM,K1,K2,ICONT,NM,I,NAN
0006      REAL*8 A,B,C,D,AN2,DL,H,C1,ALFA,RO,EPS
0007      REAL*8 SUM,AN4,HX,HY,U,F,F0,X,X0,Y
0008      REAL*8 U0,Z,DU,DH,AK,AN1,DD
0009      DIMENSION U0(M),Z(N),U(NU)
0010      EXTERNAL PTICR0,PTIMRC,PTIMRS,PTIMRD,
          *PTIMRP,PTIMRR,PTIMRQ,PTIMRN,
          *PTIMRK,PTICR6,PTIMR0,PTIMRA,AUMINM
0011      ICONT=0
C * ICONT-ПРИЗНАК РАБОТЫ С ПРОДОЛЖЕНИЕМ
C * ICONT=0-НАЧАЛО РАБОТЫ
C * ICONT=1-ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ
0012      110 CONTINUE
0013      DU=DSQRT(DL)
0014      DH=DSQRT(H)
C * ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ
C * НАЗВАН.* ДЛИНА * СОДЕРЖАНИЕ
C * AK(D)      N*M      МАТРИЦА СИСТЕМЫ,
C *           D=A*INV(S) МАТРИЦА
C *           ВЕКТОРОВ ОТРАЖЕНИЯ
C *   C          N      ДИАГОНАЛЬ СТАБИЛИЗАТОРА,
C *           ПОДДИАГОНАЛЬ P'*P
C *   B          N      НАДДИАГОНАЛЬ СТАБИЛИЗА-
C *           ТОРА, НАДДИАГОНАЛЬ P'*P
C *   S1         N      ДИАГОНАЛЬ S,ГДЕ C=S'*S

```

```

C *   S2      N      НАДДИАГОНАЛЬ S
C *   P1      N      ДИАГОНАЛЬ МАТРИЦЫ P
C *   P2      N      НАДДИАГОНАЛЬ МАТРИЦЫ P
C *   U1      N      ВЕКТОР U1=R*D'*U0
C *   U2      M      ВЕКТОР U2=Q'*U0,
C *                   РАБОЧИЙ ДЛЯ PTIMR0
C *   A        N      ДИАГОНАЛЬ P'*P
C *   G        M(N)   РАБОЧИЙ,
C *                   ДИАГОНАЛЬ P'*P+ALFA*E
C *   AL       N      ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ
C *   BT       N      ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ
C *   ФОРМИРУЕМ НАЧАЛА МАССИВОВ
0015      NAK=1
0016      NC=NAK+N*M
0017      NB=NC+N
0018      NS1=NB+N
0019      NS2=NS1+N
0020      NP1=NS2+N
0021      NP2=NP1+N
0022      NU1=NP2+N
0023      NU2=NU1+N
0024      NA=NU2+M
0025      NG=NA+N
0026      NAL=NG+M
0027      NBT=NAL+N
0028      NOM=NBT+N
0029      IF(NOM-1.GT.NU) GOTO 64
C *   K1,K2-СЧЕТЧИКИ ИТЕРАЦИИ
0030      K1=0
0031      K2=0
0032      KJ=0
0033      AMU=0.
0034      FUNC=0.
C *   RO - ВЕС ПРОИЗВОДНОЙ В НОРМЕ W
0035      RO=1.
0036      HX=(B-A)/(N-1.)
0037      HY=(D-C)/(M-1.)
0038      DD=HX/HY
C *   EPS - ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕВЯЗКИ
0039      EPS=(C1-1.)*DL
0040      IF(ICONT.EQ.1) GOTO 111
C *   ФОРМИРУЕМ МАТРИЦУ ОПЕРАТОРА A
0041      CALL PTICR0(AK,U(NAK),A,B,C,D,N,M)
C *   ФОРМИРУЕМ МАТРИЦУ СТАБИЛИЗАТОРА
0042      CALL PTIMRC(U(NC),U(NB),N,RO/HX**2)
C *   ПРЕДСТАВЛЯЕМ МАТРИЦУ СТАБИЛИЗАТОРА
C *   В ВИДЕ S'*S
0043      CALL PTIMRS(U(NC),U(NB),U(NS1),U(NS2))
C *   ВЫЧИСЛЯЕМ D=A*INV(S)
0044      CALL PTIMRD(U(NS1),U(NS2),U(NAK),N,M)
C *   QPR-АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦЫ AK
C *   СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЯ
0045      CALL PTIMR0(U(NAK),U(NP1),U(NP2),
*U(NG),N,M)
C *   ФОРМИРУЕМ ТРЕХДИАГОНАЛЬНУЮ МАТРИЦУ P'*F
0046      CALL PTIMRP(U(NP1),U(NP2),U(NC),

```

```

      *U(NB),U(NA),N,M)
0047 C * ФОРМИРУЕМ U2=Q`*U0 ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕВЯЗ
      CALL PTIMRQ(U0,U(NAK),U(NU2),N,M,U(NC)
C * ФОРМИРУЕМ U1=R*D`*U0=P`*U2
0048 C * ПРАВУЮ ЧАСТЬ СИСТЕМЫ
      CALL PTIMRR(U(NU1),U(NU2),
      *U(NP1),U(NP2),N,M)
0049 111 CONTINUE
0050 NAN=NA+N-1
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕРЫ НЕСОВМЕСТИМОСТИ - AN1
0051 AN1=0.0
0052 IF(N.EQ.M)GOTO 13
0053 CALL PTICR6(U(NU2+N),U(NU2+N),M-N,AN1
0054 AN1=AN1*HY
0055 13 CONTINUE
0056 IF(C2.GE.1.) CALL AUMINM(U(NA),ALF,
      *IMAX,U(NC),U(NB),U(NG).U(NU1).U(NAL),
      *U(NBT),Z,N,AN1,AN2,M,DU,DH,HX,HY,AN4,
      *U(NP1),U(NP2),U(NU2),AMU,C2,KJ,EPF)
      GOTO (70,71,69),KJ
0057 71 CONTINUE
0058 C * НАЧАЛО ЦИКЛОВ ПО ПАРАМЕТРУ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
      DO 22 I=NA,NAN
0059 22 U(I+N)=U(I)+ALFA*DD
0060 C * РЕШАЕМ СИСТЕМУ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ
0061 CALL PTIMRN(U(NC),U(NB),U(NG),U(NU1),
      *U(NAL),U(NBT),Z,N)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0062 CALL PTIMRA(AN1,AN2,Z,N,M,DU,DH,HX,HY,
      *AN4,U(NP1),U(NP2),U(NU2),FUNC,AMU,C2)
0063 IF(C1.LE.1)GOTO 100
0064 IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0065 IF(AN4.GE.EPS) GOTO 11
C * ЕСЛИ НЕВЯЗКА МЕНЬШЕ EPS ТО УМНОЖАЕМ НА 2
C * ПОКА НЕ СТАНЕТ БОЛЬШЕ EPS
0066 ALFA=2.*ALFA
0067 K1=K1+1
0068 IF(K1.EQ.IMAX) GOTO 65
0069 GOTO 13
C * ЗАДАЕМ НАЧАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ДЛЯ МЕТОДА ХОРД
0070 11 F0=AN4
0071 X0=1./ALFA
0072 ALFA=ALFA*2.
0073 X=1./ALFA
0074 DO 5 I=NA,NAN
0075 U(I+N)=U(I)+ALFA*DD
C * МЕТОД ПРОГОНКИ
0076 CALL PTIMRN(U(NC),U(NB),U(NG),U(NU1),
      *U(NAL),U(NBT),Z,N)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ НЕВЯЗКУ AN2
C * И ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ AN4
0077 CALL PTIMRA(AN1,AN2,Z,N,M,DU,DH,HX,HY,
      *AN4,U(NP1),U(NP2),U(NU2),FUNC,AMU,C2)
0078 14 CONTINUE
C * ЕСЛИ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ:
C * НЕВЯЗКА МЕНЬШЕ EPS,НО БОЛЬШЕ -EPS,

```

```

0079 C * ТО ПРОГРАММА РАБОТУ ЗАКАНЧИВАЕТ
0080 IF(DABS(AN4).LE.EPS) GOTO 100
1 CONTINUE
C * ЕСЛИ НЕВЯЗКА МЕНЬШЕ -EPS,
C * ТО ИДЕМ НА МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ХОРД
0081 IF(AN4.LT.-EPS) GOTO 2
0082 IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0083 K2=K2+1
0084 IF(K2.EQ.IMAX)GO TO 66
C * СОБСТВЕННО МЕТОД ХОРД
0085 Y=X0-F0/(AN4-F0)*(X-X0)
0086 X0=X
0087 X=Y
0088 F0=AN4
0089 ALFA=1./X
0090 DO 7 I=NA,NAN
0091 7 U(I+N)=U(I)+ALFA*DD
C * МЕТОД ПРОГОНКИ
0092 CALL PTIMRN(U(NC),U(NB),U(NG),U(NU1),
*U(NAL),U(NBT),Z,N)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ НЕВЯЗКУ AN2
C * И ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ AN4
0093 CALL PTIMRA(AN1,AN2,Z,N,M,DU,DH,HX,HY,
*AN4,U(NP1),U(NP2),U(NU2),FUNC,AMU,C2)
GOTO 14
0094 2 CONTINUE
0095 C * СЮДА ПОПАДАЕМ ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА
C * СТАНОВИТСЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ,
C * В ЭТОМ СЛУЧАЕ ПЕРЕХОДИМ
C * НА МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ХОРД
0096 F=AN4
0097 23 Y=X0+F*(X-X0)/(F-F0)
0098 ALFA=1./Y
0099 DO 15 I=NA,NAN
0100 15 U(I+N)=U(I)+ALFA*DD
C * МЕТОД ПРОГОНКИ
0101 CALL PTIMRN(U(NC),U(NB),U(NG),U(NU1),
*U(NAL),U(NBT),Z,N)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ НЕВЯЗКУ AN2
C * И ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ AN4
0102 CALL PTIMRA(AN1,AN2,Z,N,M,DU,DH,HX,HY,
*AN4,U(NP1),U(NP2),U(NU2),
*FUNC,AMU,C2)
C * ЕСЛИ НЕВЯЗКА >-EPS,НО <EPS
C * ТО ПРОГРАММА РАБОТУ ЗАКАНЧИВАЕТ
0103 IF(DABS(AN4).LE.EPS) GOTO 102
0104 K2=K2+1
0105 IF(K2.GE.IMAX) GOTO 67
0106 IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0107 IF(AN4.LE.-EPS) GOTO 37
0108 X0=Y
0109 F0=AN4
0110 GOTO 23
0111 37 CONTINUE
C * МЕНЯЕМ ИНТЕРВАЛ
X=Y

```

```

Ø113          F=AN4
Ø114          GOTO 23
Ø115          ENTRY PTIMRE
C * ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ
Ø116          ICONT=1
Ø117          GOTO 11Ø
Ø118          64 CONTINUE
C * НЕ ХВАТАЕТ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
Ø119          IERR=64
Ø120          GOTO 1Ø1
Ø121          65 CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ УМНОЖЕНИИ НА 2,
C * А ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА < НУЛЯ
Ø122          IERR=65
Ø123          GOTO 1Ø1
Ø124          66 CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ ИТЕРАЦИИ
Ø125          IERR=66
Ø126          GOTO 1Ø1
Ø127          67 CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ ИТЕРАЦИЯ,
C * ПРИМЕНЯЛСЯ МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД
Ø128          IERR=67
Ø129          GOTO 1Ø1
Ø130          68 CONTINUE
C * ЗАДАНО ИЛИ ПОЛУЧИЛОСЬ ALFA=Ø.
Ø131          IERR=68
Ø132          GOTO 1Ø1
Ø133          69 CONTINUE
C * МИНИМУМ НЕ ЛОКАЛИЗОВАН ЗА IМАХ ПОПЫТОК
Ø134          IERR=69
Ø135          GOTO 1Ø1
Ø136          7Ø CONTINUE
C * АМУ С ДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ НЕ НАЙДЕНО
C * ЗА IМАХ ИТЕРАЦИЯ
Ø137          IERR=7Ø
Ø138          GOTO 1Ø1
Ø139          1Ø2 CONTINUE
C * НОРМАЛЬНОЕ ОКОНЧАНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ
C * МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ХОРД
Ø140          IERR=1
Ø141          GOTO 1Ø1
Ø142          1ØØ CONTINUE
C * НОРМАЛЬНОЕ ОКОНЧАНИЕ
Ø143          IERR=Ø
Ø144          1Ø1 CONTINUE
C * ВЫПОЛНЯЕМ ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
C * К СТАРЫМ ПЕРЕМЕННЫМ
Ø145          CALL PTIMRK(Z,U(NS1),U(NS2),U(NAK),
                *N,M,Z,U(NG))
Ø146          RETURN
Ø147          END

```

```

ØØØ1          SUBROUTINE PTIMRC(C,B,N,RO)
C * ПОДПРОГРАММА ФОРМИРУЕТ СТАБИЛИЗАТОР,

```

```

C * C-ДИАГОНАЛЬ, В-НАДДИАГОНАЛЬ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N, I
0004      REAL*8 RO, C, B
0005      DIMENSION C(N), B(N)
0006      DO 1 I=1, N
0007      C(I)=1.+2.*RO
0008      B(I)=-RO
0009      IF(I.EQ.1.OR.I.EQ.N) C(I)=1.+RO
0010      1  CONTINUE
0011      RETURN
0012      END

0001      SUBROUTINE PTIMRS(C, B, S1, S2, N)
C * ПОДПРОГРАММА ПРЕДСТАВЛЯЕТ СТАБИЛИЗАТОР
C * В ВИДЕ S`*S,
C * S1-ДИАГОНАЛЬ, S2-НАДДИАГОНАЛЬ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N, I
0004      REAL*8 C, B, S1, S2
0005      DIMENSION C(N), B(N), S1(N), S2(N)
0006      S1(1)=DSQRT(C(1))
0007      S2(1)=B(1)/S1(1)
0008      DO 1 I=2, N
0009      S1(I)=DSQRT(C(I)-(S2(I-1))**2)
0010      1  S2(I)=B(I)/S1(I)
0011      RETURN
0012      END

0001      SUBROUTINE PTIMRD(S1, S2, AA, N, M)
C * ПОДПРОГРАММА ФОРМИРУЕТ МАТРИЦУ D=A*INV(S),
C * S ЗАДАНА ДИАГОНАЛЬЮ S1 И НАДДИАГОНАЛЬЮ S2
C * РЕЗУЛЬТАТ ОСТАЕТСЯ НА МЕСТЕ МАТРИЦЫ A
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N, M, I, J
0004      REAL*8 S1, S2, AA
0005      DIMENSION S1(N), S2(N), AA(M, N)
0006      DO 1 J=1, M
0007      1  AA(J, 1)=AA(J, 1)/S1(1)
0008      DO 2 I=2, N
0009      DO 3 J=1, M
0010      AA(J, I)=
0011      3  =(AA(J, I)-S2(I-1)*AA(J, I-1))/S1(I)
0012      2  CONTINUE
0013      RETURN
0014      END

0001      SUBROUTINE PTIMRØ(D, P1, P2, A, N, M)
C * QPR-АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
C * МАТРИЦЫ D(M, N)=Q*P*R

```

```

C * P1,P2 - ДИАГОНАЛЬ И
C * НАДИАГОНАЛЬ МАТРИЦЫ P
C * НА МЕСТЕ МАТРИЦЫ D(M,N) ОСТАЮТСЯ:
C * В СТОЛБЦАХ ПОД ДИАГОНАЛЬЮ -
C * ВЕКТОРА ОТРАЖЕНИЙ СЛЕВА (Q)
C * В СТРОКАХ НАД ДИАГОНАЛЬЮ -
C * ВЕКТОРА ОТРАЖЕНИЙ СПРАВА (R)
0002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003 REAL*8 D,P1,P2,A,B,T,S
0004 INTEGER N,M,K,K1,I,J
0005 DIMENSION D(M,N),P1(N),P2(N),A(M)
0006 EXTERNAL PTIMR1
0007 DO 6 K=1,N
C * ВЫБИРАЕМ K-ЫЙ СТОЛБЕЦ
0008 DO 11 J=K,M
0009 11 A(J)=D(J,K)
C * ФОРМИРУЕМ ВЕКТОР ОТРАЖЕНИЯ
0010 CALL PTIMR1(A(K),M-K+1,B)
0011 A(K)=A(K)-B
0012 CALL PTIMR1(A(K),M-K+1,T)
0013 IF(T.EQ.Ø.)GOTO 12
0014 DO 13 J=K,M
0015 13 A(J)=A(J)/T
0016 GOTO 14
0017 12 CONTINUE
0018 DO 15 J=K,M
0019 15 A(J)=Ø.
0020 14 CONTINUE
C * A(K) - A(M) - ВЕКТОР ОТРАЖЕНИЯ
C * ЗАПИСЫВАЕМ ВЕКТОР ОТРАЖЕНИЯ В МАТРИЦУ D
0021 DO 16 J=K,M
0022 16 D(J,K)=A(J)
C * ФОРМИРУЕМ ЭЛЕМЕНТ ДИАГОНАЛИ - P1
0023 P1(K)=B
C * ОТРАЖАЕМ СТОЛБЦЫ С K+1 ПО N МАТРИЦЫ D
0024 K1=K+1
0025 DO 17 I=K1,N
0026 S=Ø.
0027 DO 18 J=K,M
0028 18 S=S+D(J,I)*A(J)
0029 DO 19 J=K,M
0030 19 D(J,I)=D(J,I)-2.*S*A(J)
0031 17 CONTINUE
0032 IF(K1.LT.N)GOTO 6Ø
0033 IF(K1.EQ.N)P2(K)=D(K,K1)
0034 GOTO 6
0035 6Ø CONTINUE
C * ВЫБИРАЕМ K-Ю СТРОКУ МАТРИЦЫ D
0036 DO 21 I=K1,N
0037 21 A(I)=D(K,I)
C * ФОРМИРУЕМ ВЕКТОР ОТРАЖЕНИЯ
0038 CALL PTIMR1(A(K1),N-K1+1,B)
0039 A(K1)=A(K1)-B
0040 CALL PTIMR1(A(K1),N-K1+1,T)
0041 IF(T.EQ.Ø.)GOTO 22
0042 DO 23 I=K1,N

```

```

0043      23      A(I)=A(I)/T
0044          GOTO 24
0045      22      CONTINUE
0046          DO 25 I=K1,N
0047      25      A(I)=0.
0048      24      CONTINUE
C * В A(K1) - A(N) - ВЕКТОР ОТРАЖЕНИЯ
C * ЗАПИСЫВАЕМ ВЕКТОР ОТРАЖЕНИЯ
C * В K-Ю СТРОКУ МАТРИЦЫ D
0049          DO 26 I=K1,N
0050      26      D(K,I)=A(I)
C * ФОРМИРУЕМ ЭЛЕМЕНТ ПОДДИАГОНАЛИ P2
0051      P2(K)=B
C * ОТРАЖАЕМ СТРОКИ С K+1 ПО M МАТРИЦЫ D
0052          DO 27 J=K1,M
0053          S=0.
0054          DO 28 I=K1,N
0055      28      S=S+D(J,I)*A(I)
0056          DO 29 I=K1,N
0057      29      D(J,I)=D(J,I)-2.*S*A(I)
0058      27      CONTINUE
0059      6      CONTINUE
0060          RETURN
0061          END

```

```

0001          SUBROUTINE PTIMR1(A,N,S)
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ S ВЕКТОРА A ДЛИНЫ N
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003          REAL*8 A,S,R,R1
0004          INTEGER N,I
0005          DIMENSION A(N)
0006          R=0.
0007          DO 1 I=1,N
0008          R1=DABS(A(I))
0009          IF(R1.GE.R)R=R1
0010      1      CONTINUE
0011          S=0.
0012          IF(R.EQ.0.)GOTO 999
0013          R1=0.
0014          DO 2 I=1,N
0015          R1=R1+(A(I)/R)**2
0016      2      CONTINUE
0017          S=DSQRT(R1)*R
0018      999      CONTINUE
0019          RETURN
0020          END

```

```

0001          SUBROUTINE PTIMRP(F1,P2,A,B,C,N,M)
C * ПОДПРОГРАММА ФОРМИРУЕТ МАТРИЦУ P`*P,
C * C-ДИАГОНАЛЬ, A-ПОДДИАГОНАЛЬ,
C * B-НАДДИАГОНАЛЬ РЕЗУЛЬТАТА
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```



```

0003      INTEGER N,M,I,N1
0004      REAL*8 P1,P2,A,B,C
0005      DIMENSION P1(N),P2(N),A(N),B(N),C(N)
0006      C(1)=P1(1)**2
0007      B(1)=P1(1)*P2(1)
0008      A(2)=B(1)
0009      C(N)=P1(N)**2+P2(N-1)**2
0010      B(N)=0.
0011      A(1)=0.
0012      N1=N-1
0013      DO 1 I=2,N1
0014      C(I)=P1(I)**2+P2(I-1)**2
0015      B(I)=P1(I)*P2(I)
0016      A(I+1)=B(I)
0017      1  CONTINUE
0018      RETURN
0019      END

```

```

0001      SUBROUTINE PTIMRQ(U0,D,U2,N,M,A)
C * ПРОГРАММА ФОРМИРОВАНИЯ ВЕКТОРА U2=Q*U0
C * ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕВЯЗКИ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N,M,J,K
0004      REAL*8 U0,D,U2,A,S
0005      DIMENSION U0(M),D(M,N),U2(M),A(M)
0006      EXTERNAL PTICR6,PTICR1
C * ПЕРЕСЫЛАЕМ ПРАВУЮ ЧАСТЬ U0
0007      DO 1 J=1,M
0008      1  U2(J)=U0(J)
C * ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ОТРАЖАЕМ ВЕКТОР U2
0009      DO 3 K=1,N
0010      DO 4 J=K,M
0011      4  A(J)=D(J,K)
C * В A - ВЕКТОР ОТРАЖЕНИЯ
C * ОТРАЖАЕМ ВЕКТОР U2
0012      CALL PTICR6(A(K),U2(K),M-K+1,S)
0013      CALL PTICR1(U2(K),A(K),U2(K),
      *M-K+1,-2.*S)
0014      3  CONTINUE
0015      RETURN
0016      END

```

```

0001      SUBROUTINE PTIMRR(U1,U2,P1,P2,N,M)
C * ПРОГРАММА ФОРМИРОВАНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C * U1=P*U2 ДЛЯ ПРОГОНКИ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N,M,I
0004      REAL*8 U1,U2,P1,P2
0005      DIMENSION U2(M),P1(N),P2(N),U1(N)
0006      U1(1)=P1(1)*U2(1)
0007      DO 1 I=2,N
0008      U1(I)=U2(I-1)*P2(I-1)+U2(I)*P1(I)

```

```

0009      1      CONTINUE
0010      RETURN
0011      END

0001      SUBROUTINE PTIMRN(A,B,C,F,AL,BT,X,N)
C * РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ СИСТЕМЫ УР-НИЙ:
C *  $A(I)*X(I-1)+C(I)*X(I)+B(I)*X(I+1)=F(I)$ 
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N,I,J
0004      REAL*8 Y,A(N),B(N),C(N),F(N),AL(N)
0005      REAL*8 BT(N),X(N)
0006      AL(1)=0.
0007      BT(1)=0.
0008      DO 1 I=2,N
0009      Y=-(C(I-1)+A(I-1)*AL(I-1))
0010      AL(I)=B(I-1)/Y
0011      BT(I)=(A(I-1)*BT(I-1)-F(I-1))/Y
0012      1      CONTINUE
C * ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЫЧИСЛЕНЫ
0013      X(N)=(A(N)*BT(N)-F(N))/
/(-C(N)-A(N)*AL(N))
0014      DO 2 I=2,N
0015      J=N-I+2
0016      X(J-1)=AL(J)*X(J)+BT(J)
0017      2      CONTINUE
0018      RETURN
0019      END

```

```

0001      SUBROUTINE PTIMRA(AN1,AN2,Z,N,M,DL,H,
      *HX,HY,AN4,P1,P2,U2,FUNC,AMU,C2)
C * ПОДПРОГРММА ВЫЧИСЛЯЕТ НЕВЯЗКУ AN2
C * И ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ AN4
C * AN1 - МЕРА НЕСОВМЕСТИМОСТИ
C * СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
C * DL,H - ОШИБКИ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C * И ОПЕРАТОРА (БЕЗ КВАДРАТОВ)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N,M,I
0004      REAL*8 AN1,AN2,AN4,H,HX,HY,S
0005      REAL*8 DL,Z,P1,P2,U2,SUM
0006      DIMENSION P1(N),P2(N),Z(N),U2(M)
0007      EXTERNAL PTICR6
C * ВЫЧИСЛЯЕМ НЕВЯЗКУ - AN2
0008      SUM=0.
0009      DO 46 I=2,N
0010      46 SUM=SUM+(P1(I-1)*Z(I-1)+
+P2(I-1)*Z(I)-U2(I-1))**2
0011      SUM=SUM+(P1(N)*Z(N)-U2(N))**2
0012      IF(C2.GE.1.) GOTO 6
0013      AN2=SUM*HY+AN1
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0014      AN4=AN2-DL**2-AN1

```

```

0015         IF(H.EQ.0.)GOTO 5
0016 C * ЕСЛИ H!0., ТО ВЫЧИСЛЯЕМ НОРМУ РЕШЕНИЯ
0017         CALL PTICR6(Z,Z,N,S)
0018         S=DSQRT(S*HX)
0019 C * S - НОРМА РЕШЕНИЯ В W21
0020         AN4=AN2-(DL+H*S)**2-AN1
0021         5 CONTINUE
0022         GOTO 7
0023         6 AN2=SUM*HY
0024         AN3=DSQRT(AN2)
0025         CALL PTICR6(Z,Z,N,S)
0026         S=DSQRT(S*HX)
0027         FUNC=AN3+H*S
0028         AN4=AN3-H*S-DL-AMU
0029         7 RETURN
0030         END

```

```

0001         SUBROUTINE PTIMRK(X,S1,S2,D,N,M,Z,A)
0002 C * ПРОГРАММА ОБРАТНОГО ПЕРЕХОДА
0003 C * К СТАРЫМ НЕИЗВЕСТНЫМ
0004 C *
0005         Z=INV(S)*R`*X
0006         IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0007         INTEGER N,M,II,K,K1,N1,I,J
0008         REAL*8 X,S1,S2,D,Z,A,S
0009         DIMENSION X(N),S1(N),S2(N),
0010         *D(M,N),Z(N),A(N)
0011         EXTERNAL PTICR6,PTICR1
0012         DO 1 II=3,N
0013             K=N-II+1
0014             K1=K+1
0015             DO 2 I=K1,N
0016                 A(I)=D(K,I)
0017 C * В A - ВЕКТОР ОТРАЖЕНИЯ
0018 C * ОТРАЖАЕМ ВЕКТОР X
0019         CALL PTICR6(A(K1),X(K1),N-K1+1,S)
0020         CALL PTICR1(X(K1),A(K1),X(K1),
0021         *N-K1+1,-2.*S)
0022         1 CONTINUE
0023 C * УМНОЖАЕМ НА ОБРАТНУЮ К S МАТРИЦУ
0024 C * Т.Е. РЕШАЕМ СИСТЕМУ
0025         N1=N-1
0026         Z(N)=X(N)/S1(N)
0027         DO 5 I=1,N1
0028             J=N-I
0029             Z(J)=(X(J)-S2(J)*Z(J+1))/S1(J)
0030         5 CONTINUE
0031         RETURN
0032         END

```

```

0001         SUBROUTINE AUMINM(ZV,ALP,KMAX,A,B,C,F,
0002         *AL,BT,X,N,AN1,AN2,M,DL,H,HX,HY,
0003         *AN4,P1,P2,U2,AMU,C2,K2,EPSF)

```

```

0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER M,N LI,K2,K3
0004      REAL*8 ZV(N),A(N),B(N),C(N),F(N),AL(N)
0005      REAL*8 BT(N),X(N),P1(N),P2(N),U2(M)
0006      EXTERNAL PTIMRN,PTIMRA
0007      LI=0
0008      DD=HX/HY
0009      K3=0
0010      K2=0
0011      X1=0.D0
0012      1  CONTINUE
0013          DO 13 I=1,N
0014      13  C(I)=ZV(I)+ALP*DD
0015          CALL PTIMRN(A,B,C,F,AL,BT,X,N)
0016          CALL PTIMRA(AN1,AN2,X,N,M,DL,H,HX,HY,
*AN4,P1,P2,U2,FUNC,AMU,C2)
0017          GOTO(2,5,6),LI
0018          F2=FUNC
0019          X2=ALP
0020          ALP=ALP*2.D0
0021          LI=1
0022          GOTO 1
0023      2  F3=FUNC
0024          X3=ALP
0025          IF(F3-F2) 3,3,4
0026      3  F1=F2
0027          X1=X2
0028          F2=F3
0029          X2=X3
0030          ALP=ALP*2.D0
0031          K3=K3+1
0032          IF(K3.GE.KMAX) GOTO 15
0033          GOTO 1
0034      4  X4=X3
0035          F4=F3
0036          AU=(DSQRT(5.D0)-1.D0)/2.D0
0037      10  X3=X1+AU*(X4-X1)
0038          X2=X4-AU*(X4-X1)
0039          ALP=X2
0040          LI=2
0041          GOTO 1
0042      5  F2=FUNC
0043          ALP=X3
0044          LI=3
0045          GOTO 1
0046      6  F3=FUNC
0047          IF(DABS(X3-X2).LE.1.D0/C2) GOTO 12
0048          IF(X1.EQ.0.) GOTO 322
0049          IF(DABS(DMIN1(F2,F3)-DMAX1(F1,F4)).
.LE.EPSF) GOTO 12
0050          GOTO 321
0051      322 IF(F4-DMIN1(F2,F3).LE.EPSF) GOTO 12
0052      321 K2=K2+1
0053          IF(K2.GE.KMAX) GOTO 14
0054          IF(F3-F2) 7,8,9
0055      7  X1=X2

```

```

0056          F1=F2
0057          GOTO 10
0058          9  X4=X3
0059          F4=F3
0060          GOTO 10
0061          8  K4=(X4+X3)/2.D0
0062          GOTO 10
0063          14 K2=1
0064          12 ALP=(X3+X2)/2.D0
0065          AMU=(F3+F2)/2.D0+DL
0066          K2=2
0067          GOTO 16
0068          15 K2=3
0069          16 RETURN
0070          END

```

**II. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма  
1-го рода методом Тихонова с использованием метода  
сопряженных градиентов**

```

0001          SUBROUTINE PTIZR(AK,U0,A,B,C,D,N,M,Z,
          *AN2,DL,H,C1,IMAX,
          *ALFA,U,NU,IERR)
C * ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
C * ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C * ТИХОНОВА С ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C * В СООТВЕТСТВИИ С ПРИНЦИПОМ
C * ОБОБЩЕННОЙ НЕВЯЗКИ
C * ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ТИХОНОВА
C * ИСПОЛЬЗУЕТСЯ МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003          INTEGER IERR,K1,K2,NU1,NU,M,N,NA,NGRD,
          *NS,NP,N1,I,IMAX,ITER,IER
0004          REAL*8 U0,U,Z,DU,DH,AK,DD
0005          REAL*8 A,B,C,D,AN2,DL,H,C1,ALFA,RO,EPS
0006          REAL*8 AN4,F0,F,X0,X,Y,HX,HY
0007          DIMENSION U0(M),U(NU),Z(N)
0008          EXTERNAL PTICR0,PTIZR1,PTIZR2
C *          ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ
C *          ИМЯ      ДЛИНА      СОДЕРЖАНИЕ
C *          A      N*M      МАТРИЦА ОПЕРАТОРА
C *          GRD    N      ГРАДИЕНТ В PTIZR1
C *          S      N      НАПРАВЛЕНИЕ СПУСКА В PTIZR1
C *          P      M      РАБОЧИЙ МАССИВ ДЛЯ PTIZR1
0009          ICONT=0
C *          ICONT - ПРИЗНАК РАБОТЫ С ПРОДОЛЖЕНИЕМ
C *          ICONT=0 - НАЧАЛО РАБОТЫ
C *          ICONT=1 - ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ
0010          110 CONTINUE
0011          DU=DSQRT(DL)
0012          DH=DSQRT(H)
C *          ФОРМИРУЕМ НАЧАЛА МАССИВОВ
0013          NA=1
0014          NGRD=NA+N*M

```

```

0015      NS=NGRD+N
0016      NP=NS+N
0017      NU1=NP+M
0018      IF(NU1-1.GT.NU) GOTO 64
C * K1,K2 - СЧЕТЧИКИ ИТЕРАЦИЙ
0019      K1=0
0020      K2=0
0021      N1=N+1
0022      HX=(B-A)/(N-1.)
0023      HY=(D-C)/(M-1.)
0024      DD=HX/HY
C * RO - ВЕС ПРОИЗВОДНОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ W21,
C * ДЕЛЕННЫЙ НА КВАДРАТ ШАГА СЕТКИ
0025      RO=1./HX**2
C * EPS - ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕВЯЗКИ
0026      EPS=(C1-1.)*DL
0027      IF(ICONT.EQ.1) GOTO 111
C * ФОРМИРУЕМ МАТРИЦУ ОПЕРАТОРА А
0028      CALL PTICR0(AK,U(NA),A,B,C,D,N,M)
0029      111 CONTINUE
C * ПОДБИРАЕМ ALFA ТАК, ЧТОБЫ
C * ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА БЫЛА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ
0030      13 CONTINUE
C * ИШЕМ МИНИМУМ ФУНКЦИОНАЛА
C * МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0031      CALL PTIZR1(U(NA),Z,U0,N,M,ITER,
*0.,0.,N,AN2,ALFA*DD,RO,Z,
*U(NGRD),U(NS),U(NP),IER)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0032      CALL PTIZRA(AN2,Z,N,DU,DH,HX,HY,RO,AN4)
0033      IF(C1.LE.1.)GOTO 100
0034      IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0035      IF(AN4.GT.EPS) GOTO 11
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА <EPS,
C * ТО УМНОЖАЕМ ALFA НА 2, ПОКА НЕ СТАНЕТ >EPS
C * ИЛИ НЕ БУДЕТ СДЕЛАНО IМАХ ИТЕРАЦИЙ
0036      K1=K1+1
0037      IF(K1.EQ.IMAX) GOTO 65
0038      ALFA=2.*ALFA
0039      GOTO 13
C * ЗАДАЕМ ДВЕ НАЧАЛЬНЫЕ ТОЧКИ МЕТОДА ХОРД
0040      11 CONTINUE
0041      F0=AN4
0042      X0=1./ALFA
0043      ALFA=ALFA*2.
0044      X=1./ALFA
C * МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0045      CALL PTIZR1(U(NA),Z,U0,N,M,ITER,
*0.,0.,N,AN2,ALFA*DD,RO,Z,
*U(NGRD),U(NS),U(NP),IER)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0046      CALL PTIZRA(AN2,Z,N,DU,DH,HX,HY,RO,AN4)
0047      14 CONTINUE
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА <EPS,НО >-EPS,
C * ТО ПРОГРАММА РАБОТУ ЗАКАНЧИВАЕТ

```

```

0048          IF(DABS(AN4).LE.EPS) GOTO 100
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА <-EPS,
C * ТО ПЕРЕХОДИМ НА МОДИФИЦИРОВАННЫЙ
C * МЕТОД ХОРД
0049          IF(AN4.LE.-EPS)GOTO 2
0050          IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0051          K2=K2+1
0052          IF(K2.EQ.IMAX)GOTO 66
C * СОБСТВЕННО МЕТОД ХОРД
0053          Y=X0-F0/(AN4-F0)*(X-X0)
0054          X0=X
0055          X=Y
0056          F0=AN4
0057          ALFA=1./X
C * МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0058          CALL PTIZR1(U(NA),Z,U0,N,M,ITER,
*0.,0.,N,AN2,ALFA*DD,RO,Z,
*U(NGRD),U(NS),U(NP),IER)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0059          CALL PTIZRA(AN2,Z,N,DU,DH,HX,HY,RO,AN4)
0060          GOTO 14
0061          2 CONTINUE
C * СЮДА ПОПАДАЕМ, ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА
C * СТАЛА <-EPS. ПЕРЕХОДИМ НА МОДИФИЦИРОВАННЫЙ
C * МЕТОД ХОРД
0062          F=AN4
0063          23 CONTINUE
0064          Y=X0+F*(X-X0)/(F-F0)
0065          ALFA=1./Y
C * МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0066          CALL PTIZR1(U(NA),Z,U0,N,M,ITER,
*0.,0.,N,AN2,ALFA*DD,RO,Z,
*U(NGRD),U(NS),U(NP),IER)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0067          CALL PTIZRA(AN2,Z,N,DY,DH,HX,HY,RO,AN4)
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА <EPS,НО >-EPS,
C * ТО ПРОГРАММА РАБОТУ ЗАКАНЧИВАЕТ
0068          IF(DABS(AN4).LE.EPS) GOTO 101
0069          IF(AN4.LE.-EPS) GOTO 37
0070          IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0071          K2=K2+1
0072          IF(K2.EQ.IMAX)GOTO 67
0073          X0=Y
0074          F0=AN4
0075          GOTO 23
0076          37 CONTINUE
C * ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛА
0077          X=Y
0078          F=AN4
0079          GOTO 23
0080          ENTRY PTIZRE
C * ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ
0081          ICONT=1
0082          GOTO 110
0083          64 CONTINUE

```

```

C * НЕ ХВАТАЕТ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0084      IERR=64
0085      GOTO 999
0086      65  CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ УМНОЖЕНИЯ НА 2,
C * А НЕВЯЗКА-ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ
0087      IERR=65
0088      GOTO 999
0089      66  CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ ИТЕРАЦИЙ МЕТОДОМ ХОРД
0090      IERR=66
0091      GOTO 999
0092      67  CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ ИТЕРАЦИЯ,
C * ПРИМЕНЯЛСЯ МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД
0093      IERR=67
0094      GOTO 999
0095      68  CONTINUE
C * ЗАДАНО ИЛИ ПОЛУЧИЛОСЬ ALFA=0.
0096      IERR=68
0097      GOTO 999
0098      100 CONTINUE
C * РЕШЕНИЕ НАЙДЕНО МЕТОДОМ ХОРД
0099      IERR=0
0100      GOTO 999
0101      101 CONTINUE
C * РЕШЕНИЕ НАЙДЕНО С ПРИМЕНЕНИЕМ
C * МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ХОРД
0102      IERR=1
0103      999 CONTINUE
0104      RETURN
0105      END

0001      SUBROUTINE PTIZR1(A,Z0,U0,N,M,ITER,DL2,
      *ANGRD,IMAX,AN2,ALF,RO,Z,GRAD,S,U,IERR)
C * ПОДПРОГРАММА МИНИМИЗИРУЕТ ФУНКЦИОНАЛ
C * ТИХОНОВА МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
C * АК(M,N) - МАТРИЦА ОПЕРАТОРА В УР-НИИ AZ=U
C * Z0 - НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C * U0 - ПРАВАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ AZ=U
C * DL2 - УРОВЕНЬ ВЫХОДА ПО НЕВЯЗКЕ
C * ANGRD - ПО НОРМЕ ГРАДИЕНТА
C * AN2 - ПОЛУЧЕННАЯ НЕВЯЗКА
C * ALF - ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C * RO - ВЕС РАЗНОСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
C *      В СТАБИЛИЗАТОРЕ
C * РЕШЕНИЕ - ЭКСТРЕМАЛЬ В МАССИВЕ Z
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER ITER,N,M,IMAX,IERR,IED
0004      REAL*8 A,Z0,U0,Z,GRAD,S,U
0005      REAL*8 DL2,ANGRD,AN2,ALF,RO,ALM
0006      REAL*8 RNORM1,RNORM,BETA,RNM
0007      DIMENSION A(M,N),Z0(N),U0(M),
      *Z(N),GRAD(N),S(N),U(M)

```



```

0008      EXTERNAL FTICR1, FTICR4, FTICR8,
          *FTICR6, FTICR3, FTICR5, FTICR0
0009      ITER=0
0010      CALL FTICR1(Z0, Z0, Z, N, 0.)
0011      C * НАХОДИМ ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА
          CALL FTICR3(A, Z, U, N, M)
0012      CALL FTICR4(GRAD, U, U0, A, N, M)
0013      CALL FTICR8(GRAD, Z, N, ALF, RO)
0014      C * НАХОДИМ СОПРЯЖЕННОЕ НАПРАВЛЕНИЕ S
          CALL FTICR1(GRAD, GRAD, S, N, 0.)
0015      C * НАХОДИМ НОРМУ S
          CALL FTICR6(S, S, N, RNORM1)
0016      C * ВНИМАНИЕ! МАШИННАЯ КОНСТАНТА
          ALM=1.E+18
0017      C * РЕШАЕМ ОДНОМЕРНУЮ ЗАДАЧУ МИНИМИЗАЦИИ,
0018      C * НАХОДИМ ШАГ
          7 CONTINUE
          CALL FTICR0(A, Z, GRAD, U, S, ALM, BETA,
          *N, M, ALF, RO, IED)
0019      IF(BETA.EQ.0.)GOTO 14
0020      BETA=-BETA
0021      C * НАХОДИМ НОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ Z
          CALL FTICR1(Z, S, Z, N, BETA)
0022      C * ВЫЧИСЛЯЕМ НЕВЯЗКУ
          CALL FTICR3(A, Z, U, N, M)
0023      CALL FTICR5(U, U0, M, AN2)
0024      C * ЕСЛИ НЕВЯЗКА < DL2,
0025      C * ТО ПРОГРАММА РАБОТУ ЗАКАНЧИВАЕТ
          IF(AN2.LE.DL2)GOTO 10
          ITER=ITER+1
0026      C * НАХОДИМ ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА
          CALL FTICR4(GRAD, U, U0, A, N, M)
0027      CALL FTICR8(GRAD, Z, N, ALF, RO)
0028      C * НАХОДИМ НОРМУ ГРАДИЕНТА
          CALL FTICR6(GRAD, GRAD, N, RNORM)
0029      RNM=RNORM/RNORM1
0030      C * НАХОДИМ СОПРЯЖЕННОЕ НАПРАВЛЕНИЕ
          CALL FTICR1(GRAD, S, S, N, RNM)
0031      RNORM1=RNORM
0032      C * ЕСЛИ НОРМА ГРАДИЕНТА < ANGRD,
0033      C * ПРОГРАММА РАБОТУ ЗАКАНЧИВАЕТ
          IF(RNORM1.LE.ANGRD) GOTO 11
          IF(ITER.GE.IMAX) GOTO 13
0034      GOTO 7
0035      10 CONTINUE
0036      C * НЕВЯЗКА СТАЛА < DL2
          IERR=0
0037      GOTO 999
0038      11 CONTINUE
0039      C * НОРМА ГРАДИЕНТА СТАЛА < ANGRD
          IERR=1
0040      GOTO 999
0041      13 CONTINUE
0042      C * СДЕЛАНО IMAХ ИТЕРАЦИЙ
          IERR=2
0043      GOTO 999

```

```

0044      14  CONTINUE
C * ШАГ МИНИМИЗАЦИИ НУЛЕВОЙ
0045      IERR=3
0046      999  CONTINUE
0047      RETURN
0048      END

0001      SUBROUTINE PTIZRA(AN2, Z, N,
      *DL, DH, HX, HY, RO, AN4)
C * ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЯЕТ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
0003      INTEGER I, N
0004      REAL*8 AN2, AN4, DL, DH, HX, HY, S, S1, RO, Z
0005      DIMENSION Z(N)
0006      EXTERNAL PTICR6, DSQRT
C * НОРМИРУЕМ НЕВЯЗКУ
0007      AN2=AN2*HY
0008      AN4=AN2-DL**2
C * ЕСЛИ H=0., ТО
C * ВЫЧИСЛЯТЬ НОРМУ РЕШЕНИЯ НЕ НУЖНО
0009      IF(DH.EQ.0.)GOTO 999
C * ВЫЧИСЛЯЕМ НОРМУ РЕШЕНИЯ В W21
0010      CALL PTICR6(Z, Z, N, S)
0011      S=S*HX
C * S - КВАДРАТ НОРМЫ РЕШЕНИЯ В L2
0012      S1=0.
0013      DO 1 I=2, N
0014      S1=S1+(Z(I)-Z(I-1))**2
0015      1  CONTINUE
0016      S1=S1*HX
C * S1 - КВАДРАТ НОРМЫ ПРОЗВОДНОЙ РЕШЕНИЯ В L2
0017      S=DSQRT(S+RO*S1)
C * S - НОРМА РЕШЕНИЯ В W21
0018      AN4=AN2-(DL+DH*S)**2
0019      999  CONTINUE
0020      RETURN
0021      END

```

### III. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множестве неотрицательных функций методом регуляризации

```

0001      SUBROUTINE PTIPR(AK, U0, A, B, C, D, N, M, Z,
      *IC, AN2, DL, H, C1, ANGRD, IMAX,
      *ALFA, R, NR, IERR)
C * ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
C * ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C * ТИХОНОВА С ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗА-
C * ЦИИ В СООТВЕТСТВИИ С ПРИНЦИПОМ ОБОБЩЕННОЙ
C * НЕВЯЗКИ. ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА
C * ТИХОНОВА ИСПОЛЬЗУЕТСЯ МЕТОД
C * СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
0003      INTEGER IERR, K1, K2, NR, M, N, NA, NG, NH, NU,

```

```

*NU1,NS,NMAX,N1,I,IMAX,ITER,IER
0004 REAL*8 U0,R,Z,DU,DH,AK,DD
0005 REAL*8 A,B,C,D,AN2,DL,H,C1,ALFA
0006 REAL*8 RO,EPS,AN4,F0,F,X0,X,Y,HX,HY
0007 DIMENSION U0(M),R(NR),Z(N)
0008 EXTERNAL PTICR0,PTICR1,
*PTISR1,PTISR2,PTISR3
C * АК - ПОДПРОГРАММА-ФУНКЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЯДРА
C * ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ
C * ИМЯ ДЛИНА СОДЕРЖАНИЕ
C * A: N*M МАТРИЦА ОПЕРАТОРА
C * H: N НАПРАВЛЕНИЕ СПУСКА
C * G: N ГРАДИЕНТ
C * U: M ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА
C * U1: M РАБОЧИЙ МАССИВ
C * S: N РАБОЧИЙ МАССИВ
C *
C * NR=N*M+3N+2M
0009 ICONT=0
C * ICONT - ПРИЗНАК РАБОТЫ С ПРОДОЛЖЕНИЕМ
C * ICONT=0 НАЧАЛО РАБОТЫ
C * ICONT=1 ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ
0010 110 CONTINUE
0011 IF(IC.NE.0.AND.IC.NE.1)ГОТО 69
C * ФОРМИРОВАНИЕ НАЧАЛА МАССИВОВ
0012 NA=1
0013 NH=N*M+1
0014 NG=NH+N
0015 NU=NG+N
0016 NU1=NU+M
0017 NS=NU1+M
0018 NMAX=NS+N
0019 IF(NMAX-1.GT.NR)ГОТО 64
0020 DU=DSQRT(DL)
0021 DH=DSQRT(H)
C * K1,K2 - СЧЕТЧИКИ ИТЕРАЦИЙ
0022 K1=0
0023 K2=0
0024 N1=N+1
0025 HX=(B-A)/(N-1.)
0026 HY=(D-C)/(M-1.)
0027 DD=HX/HY
C * RO - ВЕС ПРОИЗВОДНОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ W21,
C * ДЕЛЕННЫЙ НА КВАДРАТ ШАГА СЕТКИ
0028 IF(IC.EQ.0)RO=1./HX**2
0029 IF(IC.EQ.1)RO=0.0
C * EPS - ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕВЯЗКИ
0030 EPS=(C1-1.)*DL
0031 IF(ICONT.EQ.1) ГОТО 111
C * ФОРМИРУЕМ МАТРИЦУ ОПЕРАТОРА A
0032 CALL PTICR0(AK,R(NA),A,B,C,D,N,M)
0033 111 CONTINUE
C * ПЕРЕХОДИМ В ПИ-ПЛЮС
0034 CALL PTISR2(R(NA),Z,N,M,IC,R(NS))
0035 CALL PTICR1(Z,Z,R(NH),N,0.)
C * ПОДБИРАЕМ ALFA ТАК, ЧТОБЫ

```

```

0036 C * ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА БЫЛА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ
      13 CONTINUE
C * ИЩЕМ МИНИМУМ ФУНКЦИОНАЛА
0037 C * МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
      CALL PTISR1(R(NA),Z,U0,N,M,ITER,
        *0.,0.,N,AN2,ALFA*DD,RO,Z,R(NU),
        *R(NU1),R(NH),R(NG),R(NS),IER)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0038      CALL PTIZRA(AN2,Z,N,DU,DH,HX,HY,RO,AN4)
0039      IF(C1.LE.1.)GOTO 100
0040      IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0041      IF(AN4.GT.EPS) GOTO 11
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА <EPS,
C * ТО УМНОЖАЕМ ALFA НА 2, ПОКА НЕ СТАНЕТ >EPS
C * ИЛИ НЕ БУДЕТ СДЕЛАНО IMAX ИТЕРАЦИЙ
0042      K1=K1+1
0043      IF(K1.EQ.IMAX) GOTO 65
0044      ALFA=2.*ALFA
0045      GOTO 13
C * ЗАДАЕМ ДВЕ НАЧАЛЬНЫЕ ТОЧКИ МЕТОДА ХОРД
0046      11 CONTINUE
0047      F0=AN4
0048      X0=1./ALFA
0049      ALFA=ALFA*2.
0050      X=1./ALFA
C * МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0051      CALL PTISR1(R(NA),Z,U0,N,M,ITER,
        *0.,0.,N,AN2,ALFA*DD,RO,Z,R(NU),
        *R(NU1),R(NH),R(NG),R(NS),IER)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0052      CALL PTIZRA(AN2,Z,N,DU,DH,HX,HY,RO,AN4)
0053      14 CONTINUE
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА <EPS,НО >-EPS,
C * ТО ПРОГРАММА РАБОТУ ЗАКАНЧИВАЕТ
0054      IF(DABS(AN4).LE.EPS) GOTO 100
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА <-EPS,
C * ТО ПЕРЕХОДИМ НА МОДИФИЦИРОВАННЫЙ
C * МЕТОД ХОРД
0055      IF(AN4.LE.-EPS)GOTO 2
0056      IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0057      K2=K2+1
0058      IF(K2.EQ.IMAX)GOTO 66
C * СОБСТВЕННО МЕТОД ХОРД
0059      Y=X0-F0/(AN4-F0)*(X-X0)
0060      X0=X
0061      X=Y
0062      F0=AN4
0063      ALFA=1./X
C * МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0064      CALL PTISR1(R(NA),Z,U0,N,M,ITER,
        *0.,0.,N,AN2,ALFA*DD,RO,Z,R(NU),
        *R(NU1),R(NH),R(NG),R(NS),IER)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0065      CALL PTIZRA(AN2,Z,N,DU,DH,HX,HY,RO,AN4)
0066      GOTO 14
0067      2 CONTINUE

```

```

C * СЮДА ПОПАДАЕМ ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА
C * СТАЛА <-EPS
C * ПЕРЕХОДИМ НА МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ХОРД
0068     F=AN4
0069     23  CONTINUE
0070     Y=X0+F*(X-X0)/(F-F0)
0071     ALFA=1./Y
C * МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
0072     CALL PTISR1(R(NA),Z,U0,N,M,ITER,
      *0.,0.,N,AN2,ALFA*DD,RO,Z,R(NU),
      *R(NU1),R(NH),R(NG),R(NS),IER)
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ОБОБЩЕННУЮ НЕВЯЗКУ
0073     CALL PTIZRA(AN2,Z,N,DY,DH,HX,HY,RO,AN4)
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА <EPS,НО >-EPS,
C * ТО ПРОГРАММА РАБОТУ ЗАКАНЧИВАЕТ
0074     IF(DABS(AN4).LE.EPS) GOTO 101
0075     IF(AN4.LE.-EPS) GOTO 37
0076     IF(ALFA.EQ.0.)GOTO 68
0077     K2=K2+1
0078     IF(K2.EQ.IMAX)GOTO 67
0079     X0=Y
0080     F0=AN4
0081     GOTO 23
0082     37  CONTINUE
C * ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛА
0083     X=Y
0084     F=AN4
0085     GOTO 23
0086     ENTRY PTIPRE
C * ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ
0087     ICONT=1
0088     GOTO 110
0089     64  CONTINUE
C * НЕ ХВАТАЕТ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0090     IERR=64
0091     GOTO 9999
0092     65  CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ УМНОЖЕНИИ НА 2,
C * А НЕВЯЗКА-ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ
0093     IERR=65
0094     GOTO 999
0095     66  CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ ИТЕРАЦИЙ МЕТОДОМ ХОРД
0096     IERR=66
0097     GOTO 999
0098     67  CONTINUE
C * СДЕЛАНО IМАХ ИТЕРАЦИЙ,
C * ПРИМЕНЯЛСЯ МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД
0099     IERR=67
0100     GOTO 999
0101     68  CONTINUE
C * ЗАДАНО ИЛИ ПОЛУЧИЛОСЬ ALFA=0.
0102     IERR=68
0103     GOTO 999
0104     69  CONTINUE
C * IC НЕ РАВЕНО 0 ИЛИ 1

```

```

0105          IERR=69
0106          GOTO 9999
0107          100 CONTINUE
C * РЕШЕНИЕ НАЙДЕНО МЕТОДОМ ХОРД
0108          IERR=0
0109          GOTO 999
0110          101 CONTINUE
C * РЕШЕНИЕ НАЙДЕНО С ПРИМЕНЕНИЕМ
C * МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ХОРД
0111          IERR=1
0112          999 CONTINUE
C * ВОЗВРАТ ИЗ ПИ-ПЛУС
0113          CALL PTICR1(Z,Z,R(NH),N,0.)
0114          CALL PTISR3(Z,N,IC,R(NS))
0115          9999 CONTINUE
0116          RETURN
0117          END

```

#### IV. Программа решения одномерных интегральных уравнений типа свертки

```

0001  SUBROUTINE PTIKR(AK,U0,A,B,C,D,
*  L1,L2,N,Z,AN,DL,HH,C1,IMAX,ALPHA,
*  U,NU,IERR)
0002  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003  REAL*8 A,AK,ALPHA,AN,B,C,C1,D,DL,HH
0004  REAL*8 L1,L2,OM,T,U,U0,Z,EPRO
0005  INTEGER IERR,IMAX,IP,IQ,N
0006  INTEGER NAI,NAR,NMAX,NU,NUI,NUR,NW,NZI
0007  DIMENSION U(NU),U0(N),Z(N)
0008  EXTERNAL PTICR1,PTICR2,PTIKR1
C * ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ
C * ИМЯ ДЛИНА НАЗНАЧЕНИЕ
C * ARE N ДЕЙСТВ. ЧАСТЬ
C * ОБРАЗА ФУРЬЕ ЯДРА
C * AIM N МНИМ. ЧАСТЬ
C * ОБРАЗА ФУРЬЕ ЯДРА
C * URE N ДЕЙСТВ. ЧАСТЬ
C * ОБРАЗА ФУРЬЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C * UIM N МНИМ. ЧАСТЬ
C * ОБРАЗА ФУРЬЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C * ZIM N МНИМАЯ ЧАСТЬ РЕШЕНИЯ
C * W N СТАБИЛИЗАТОР
0009  IP=1
C * IP - ПРИЗНАК РАБОТЫ:
C * ПРИ ПЕРВОМ ОБРАЩЕНИИ IP=+1
C * ПРИ ПОВТОРНОМ ВХОДЕ ЧЕРЕЗ PTIKRE IP=-1
0010  EPRO=0.
0011  IF(C1.GT.1.)EPRO=(C1-1.)*DL
C * EPRO - ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕВЯЗКИ
C * ЕСЛИ EPRO=0, ТО ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ЭКСТРЕМАЛЬ
C * ПРИ ФИКСИРОВАННОМ ALFA
0012  100 CONTINUE
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ
0013  A=C-.5*(L1+L2)
0014  B=D-.5*(L1+L2)

```

```

C * T- ПЕРИОД ПРОДОЛЖЕНИЯ
0015     T=D-C
C * ФОРМИРОВАНИЕ НАЧАЛ МАССИВОВ
0016     NAR=1
0017     NAI=NAR+N
0018     NW=NAI+N
0019     NZI=NW+N
0020     NUR=NZI+N
0021     NUI=NUR+N
0022     NMAX=NUI+N
C * КОНТРОЛЬ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0023     IF(NMAX-1.GT.NU) GO TO 64
0024     IF(IP.EQ.-1) GO TO 101
C * ЗАДАНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ
0025     CALL PTICR1(U0,U0,U(NUR),N,0.)
0026     CALL PTICR2(U(NUI),0.,N)
0027     101 CONTINUE
C * СОБСТВЕННО РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ
0028     CALL PTIKR1(AK,U(NAR),U(NAI),Z,
*U(NZI),U(NUR),U(NUI),U(NW),N,ALPHA,
*L1,L2,AN,OM,T,DSQRT(DL),DSQRT(HH),
*IP,EPRO,IQ,IMAX,IERR)
0029     GO TO 999
0030     64 CONTINUE
C * НЕ ХВАТАЕТ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0031     IERR=64
0032     GO TO 999
C * ВХОД РТИКРЕ ПРЕДНАЗНАЧЕН
C * ДЛЯ ПОВТОРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
C * С ТЕМИ ЖЕ ЯДРОМ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ
0033     ENTRY РТИКРЕ
0034     IP=-1
0035     GO TO 100
0036     999 CONTINUE
0037     RETURN
0038     END

0001     SUBROUTINE РТИКR1(AK,ARE,AIM,ZRE,ZIM,
*URE,UIM,W,N,ALP,L1,L2,BETA,RO,A,
*DEL,HH,IPAR,EPRO,IQ,IMAX,IERR)
0002     IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003     REAL*8 A,AB,AIM,AK,ALP,ARE,A0,A1,A2,
*BA,BETA,C1,C2,C3,DEL,DP,DQ,EPRO,
*F1,F2,F3,H,HA,HH,L1,L2,P,RO,R0,R1,SSI,
*UIM,URE,U2,W,X,ZIM,ZNOR,ZRE,ZZ
0004     INTEGER I,IERR,IMAX,IPAR,IQ,M,N
0005     DIMENSION ARE(N),ZRE(N),URE(N),
*AIM(N),ZIM(N),UIM(N),W(N)
0006     EXTERNAL FTF1C
0007     H=A/N
0008     HA=H/N
C * ПРОВЕРЯЕМ ПЕРВЫЙ ЛИ ВХОД
0009     IF(IPAR.EQ.-1) GO TO 2
C * ЗАДАНИЕ ЯДРА УРАВНЕНИЯ

```

```

0010      DO 1 I=1,N
0011      ARG=(I-N/2-1)*H+0.5*(L1+L2)
0012      ARE(I)=AK(ARG)*H
0013      AIM(I)=0.0
0014      IF(ARG.LT.L1.OR.ARG.GT.L2) ARE(I)=0.0
0015      W(I)=(2.0/H*DSIN(3.1415926535800/
/ N*(I-1)))**2
0016      1 CONTINUE
0017      P=1.0
C * ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ЯДРА И ПРАВОЙ ЧАСТИ
0018      CALL FTF1C(ARE,AIM,N,1,1,P)
0019      CALL FTF1C(URE,UIM,N,1,1,P)
0020      2 CONTINUE
C * ПОДБИРАЕМ ALP ТАК, ЧТО RO(ALP) > 0
C * IQ - СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИИ
0021      IQ=0
0022      77 CONTINUE
0023      IQ=IQ+1
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК
0024      F1=0.0
0025      F2=0.0
0026      DO 44 M=1,N
0027      U2=URE(M)**2+UIM(M)**2
0028      A2=ARE(M)**2+AIM(M)**2
0029      X=1.0+W(M)
0030      IF(A2.EQ.0.0) GO TO 42
0031      BA=X/(A2+ALP*X)
0032      AB=1.0-ALP*BA
0033      C1=HA*U2*(BA*ALP)**2
0034      C2=HA*U2*AB*BA
0035      F1=F1+C1
0036      F2=F2+C2
0037      GO TO 44
0038      42 F1=F1+HA*U2
0039      44 CONTINUE
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ НЕВЯЗКИ
C * ДЛЯ ПРОВЕРКИ RO(ALP)>0
0040      BETA=F1
0041      RO=F1-(DEL+HN*DSQRT(F2))**2
C * ЕСЛИ ЗАДАНО EPRO=0, ТО КОНЧАЕМ
0042      IF(EPRO.EQ.0.0) GO TO 10
C * ЕСЛИ ЗАДАНО ALP=0.0, ТО КОНЧАЕМ
0043      IF(ALP.EQ.0.0) GO TO 68
0044      IF(RO.GT.0.0) GO TO 33
C * ПЕРЕХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ РЕШЕНИЯ,
C * ЕСЛИ НЕ УДАЛОСЬ
C * ПОДОБРАТЬ ALP ТАКОЕ, ЧТО RO(ALP) > 0
0045      IF(IQ.GT.IMAX) GO TO 65
0046      ALP=2.0*ALP
0047      GO TO 77
C * НАЧАЛО ПОИСКА КОРНЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА
0048      33 CONTINUE
0049      IQ=0
0050      3 CONTINUE
0051      IQ=IQ+1

```



```

C * БЛОК ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕВЯЗОК
0052      F1=0.0
0053      F2=0.0
0054      F3=0.0
0055      DO 4 M=1,N
0056      UZ=URE(M)**2+UIM(M)**2
0057      AZ=ARE(M)**2+AIM(M)**2
0058      X=1.0+W(M)
0059      IF(AZ.EQ.0.0) GO TO 41
0060      BA=X/(AZ+ALP*X)
0061      AB=1.0-ALP*BA
0062      C1=HA*UZ*(BA*ALP)**2
0063      C2=HA*UZ*AB*BA
0064      C3=2.0*C1*AB
0065      F1=F1+C1
0066      F2=F2+C2
0067      F3=F3+C3
0068      GO TO 4
0069      41 F1=F1+HA*UZ
0070      4 CONTINUE
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗКИ -БЕТА,
C * НОРМЫ РЕШЕНИЯ В W21 -ZNOR,
C * ОБОБЩЕННОЙ НЕВЯЗКИ - RO
C * И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ- DR
0071      BETA=F1
0072      ZNOR=DSQRT(F2)
0073      RO=BETA-(DEL+HN*ZNOR)**2
0074      IF(ALP.EQ.0.0) GO TO 68
0075      DR=-F3*ALP-(DEL+HN*ZNOR)*HN*F3/ZNOR
C * ПЕРЕХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ РЕШЕНИЯ,
C * ЕСЛИ ТОЧНОСТЬ ДОСТИГНУТА
0076      IF(DABS(RO).LT.EPRO) GO TO 10
C * ПЕРЕХОД НА МЕТОД ХОРД,
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА НЕ ВЫПУКЛА
0077      IF(RO.LT.0.0) GO TO 61
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НОВОГО АРГУМЕНТА
C * ПО МЕТОДУ НЬЮТОНА
C * И ПЕРЕХОД К СЛЕДУЮЩЕМУ ШАГУ
0078      DQ=-RO/DR
0079      A1=ALP
0080      R1=RO
0081      ALP=1.0/(1.0/ALP+DQ)
0082      IF(IQ.GE.IMAX) GO TO 66
0083      GO TO 3
C * МЕТОД ХОРД
0084      61 CONTINUE
C * ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛА ПРИ RO<0
0085      6 CONTINUE
0086      A0=ALP
0087      R0=RO
0088      7 CONTINUE
0089      IQ=IQ+1
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НОВОГО АРГУМЕНТА
C * ПО МЕТОДУ ХОРД
0090      ALP=A0*A1*(R0-R1)/(A0*R0-A1*R1)
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК

```

```

0091      8 CONTINUE
0092      F1=0.0
0093      F2=0.0
0094      DO 9 M=1,N
0095      U2=URE(M)**2+UIM(M)**2
0096      A2=ARE(M)**2+AIM(M)**2
0097      X=1.0+W(M)
0098      IF(A2.EQ.0.0) GO TO 91
0099      BA=X/(A2+ALP*X)
0100      AB=1.0-ALP*BA
0101      C1=HA*U2*(BA*ALP)**2
0102      C2=HA*U2*AB*BA
0103      F1=F1+C1
0104      F2=F2+C2
0105      GO TO 9
0106      91 F1=F1+HA*U2
0107      9 CONTINUE

C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗКИ,
C * ОБОБЩЕННОЙ НЕВЯЗКИ И НОРМЫ РЕШЕНИЯ
0108      BETA=F1
0109      ZNOR=DSQRT(F2)
0110      RO=BETA-(DEL+HN*ZNOR)**2
0111      IF(ALP.EQ.0.0) GO TO 68

C * ПЕРЕХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ РЕШЕНИЯ,
C * КОГДА ТОЧНОСТЬ ДОСТИГНУТА
0112      IF(DABS(RO).LT.EPRO) GO TO 11
0113      IF(IQ.EQ.IMAX) GO TO 67
0114      IF(RO.LT.0.0) GO TO 6

C * ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛА, КОГДА RO>0
0115      A1=ALP
0116      R1=RO
0117      GO TO 7
0118      65 CONTINUE

C * НЕ УДАЛОСЬ ПОДОВРАТЬ ALP, ТАК
C * ЧТО RO(ALP) БОЛЬШЕ НУЛЯ
0119      IERR=65
0120      GO TO 999
0121      66 CONTINUE

C * СДЕЛАНО IMAХ ИТЕРАЦИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА
0122      IERR=66
0123      GO TO 999
0124      67 CONTINUE

C * СДЕЛАНО IMAХ ИТЕРАЦИЙ,
C * ПРИМЕНЯЛСЯ МЕТОД ХОРД
0125      IERR=67
0126      GO TO 999
0127      68 CONTINUE

C * ЗАДАНО ИЛИ ПОЛУЧИЛОСЬ ALP=0.0
0128      IERR=68
0129      GO TO 999
0130      11 CONTINUE

C * РЕШЕНИЕ НАЙДЕНО МЕТОДОМ ХОРД
0131      IERR=1
0132      GO TO 999
0133      10 CONTINUE

C * НОРМАЛЬНОЕ ОКОНЧАНИЕ

```

```

0134          IERR=0
0135          999 CONTINUE
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕНИЯ
0136          SSI=-1.0
0137          DO 12 M=1,N
0138          SSI=-SSI
0139          ZZ=N*(ARE(M)**2+AIM(M)**2+
+ALP*(1.0+W(M)))
0140          IF(ZZ.NE.0.0) GO TO 111
0141          ZRE(M)=0.0
0142          ZIM(M)=0.0
0143          GO TO 12
0144          111 ZRE(M)=SSI*(ARE(M)*URE(M)+
+AIM(M)*UIM(M))/ZZ
0145          ZIM(M)=SSI*(ARE(M)*UIM(M)-
-AIM(M)*URE(M))/ZZ
0146          12 CONTINUE
C * ОБРАТНОЕ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ
0147          P=-1.0
0148          CALL FTF1C(ZRE,ZIM,N,1,1,P)
0149          RETURN
0150          END

```

```

0001          SUBROUTINE FTF1C(ARE,AIM,N,IN,K,P)
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C * ПРОГРАММА БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
C * ФУНКЦИЙ, ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ
C * НАХОДИТСЯ В ARE(N), А МНИМАЯ - В AIM(N).
C * ПРОИЗВОДИТСЯ ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ,
C * ЕСЛИ P БОЛЬШЕ НУЛЯ
C * И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,
C * ЕСЛИ P МЕНЬШЕ НУЛЯ.
C * ПРИ ОБРАЩЕНИИ ПАРАМЕТР P
C * ДОЛЖЕН ВЫЗЫВАТЬСЯ ПО НАИМЕНОВАНИЮ.
C * РЕЗУЛЬТАТ - НА МЕСТЕ МАССИВОВ ARE И AIM.
C * N - ЦЕЛАЯ СТЕПЕНЬ ДВОЙКИ.
C * ИМЕЕТСЯ ВОЗМОЖНОСТЬ НАХОЖДЕНИЯ
C * ОБРАЗА ФУРЬЕ ЛИШЬ НЕКОТОРОГО ПОДМНОЖЕСТВА
C * ТОЧЕК МАССИВОВ ARE И AIM (НАЧАЛЬНАЯ ТОЧКА
C * ПОДМНОЖЕСТВА В IN, ШАГ - В K).
0003          REAL*8 ARE,AIM,P,R,A,B,S,C,T,SI,CO
0004          INTEGER N,IN,K,I,II,J,JJ,M,MM,N1,N2
0005          DIMENSION ARE(N),AIM(N)
0006          N1=N/2
0007          MM=N1/2
0008          N2=N1+K
0009          J=IN
0010          JJ=J
0011          1 J=J+K
0012          IF(J-N1)2,2,10
0013          2 II=JJ+N1
0014          R=ARE(J)
0015          ARE(J)=ARE(II)
0016          ARE(II)=R

```

```

0017      R=AIM(J)
0018      AIM(J)=AIM(II)
0019      AIM(II)=R
0020      J=J+K
0021      M=MM
0022      3 IF(JJ-M)5,5,4
0023      4 JJ=JJ-M
0024      M=M/2
0025      GO TO 3
0026      5 JJ=JJ+M
0027      IF(JJ-J)1,1,6
0028      6 R=ARE(J)
0029      ARE(J)=ARE(JJ)
0030      ARE(JJ)=R
0031      R=AIM(J)
0032      AIM(J)=AIM(JJ)
0033      AIM(JJ)=R
0034      I=J+N2
0035      II=JJ+N2
0036      R=ARE(I)
0037      ARE(I)=ARE(II)
0038      ARE(II)=R
0039      R=AIM(I)
0040      AIM(I)=AIM(II)
0041      AIM(II)=R
0042      GO TO 1
0043      10 I=K
0044      T=3.14159265359
0045      IF(P)13,17,11
0046      11 T=-T
0047      13 P=-T
0048      14 SI=0.
0049      CO=1.
0050      S=DSIN(T)
0051      C=DCOS(T)
0052      T=0.5*T
0053      II=I
0054      I=I+I
0055      DO 16 M=IN,II,K
0056      DO 15 J=M,N,I
0057      JJ=J+II
0058      A=ARE(JJ)
0059      B=AIM(JJ)
0060      R=A*CO-B*SI
0061      ARE(JJ)=ARE(J)-R
0062      ARE(J)=ARE(J)+R
0063      R=B*CO+A*SI
0064      AIM(JJ)=AIM(J)-R
0065      15 AIM(J)=AIM(J)+R
0066      R=C*CO-S*SI
0067      SI=C*SI+S*CO
0068      16 CO=R
0069      IF(I-N)14,17,17
0070      17 RETURN
0071      END

```

V. Программа решения двумерных  
интегральных уравнений типа свертки

```

0001      SUBROUTINE PTITR(AK,U0,ALIM,N1,N2,Z,
*DL,HH,C1,ALPHA,AN,U,NU,IMAX,IERR)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER IERR,IMAX,IP,IQ,N1,N2,NAI,NAR,
*NMAX,NU,NUI,NUR,NW,NZI,NQI
0004      REAL*8 AK,ALIM,ALPHA,AN,C1,DL,HH,
*OM,T1,T2,U,U0,Z,EPRO
0005      DIMENSION U(NU),U0(N1,N2)
0006      DIMENSION Z(N1,N2),ALIM(12)
C * ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ
C * ИМЯ      ДЛИНА      НАЗНАЧЕНИЕ
C * ARE      N1*N2      ДЕЙСТВ. ЧАСТЬ
C *          N1*N2      ОБРАЗА ФУРЬЕ ЯДРА
C * AIM      N1*N2      МНИМ. ЧАСТЬ
C *          N1*N2      ОБРАЗА ФУРЬЕ ЯДРА
C * URE      N1*N2      ДЕЙСТВ. ЧАСТЬ
C *          N1*N2      ОБРАЗА ФУРЬЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C * UIM      N1*N2      МНИМ. ЧАСТЬ
C *          N1*N2      ОБРАЗА ФУРЬЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C * ZIM      N1*N2      МНИМАЯ ЧАСТЬ РЕШЕНИЯ
C * W1 и W2  N1 и N2    СТАБИЛИЗАТОРЫ
0007      IF=1
C * IP - ПРИЗНАК РАБОТЫ:
C * ПРИ ПЕРВОМ ОБРАЩЕНИИ IP=+1
C * ПРИ ПОВТОРНОМ ВХОДЕ ЧЕРЕЗ РТИКРЕ IP=-1
0008      EPRO=0.
0009      IF(C1.GT.1.)EPRO=(C1-1.)*DL
C * EPRO - ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕВЯЗКИ
C * ЕСЛИ EPRO=0, ТО ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ЭКСТРЕМАЛЬ
C * ПРИ ФИКСИРОВАННОМ ALFA
0010      100 CONTINUE
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ
0011      ALIM(1)=ALIM(5)-.5*(ALIM(9)+ALIM(10))
0012      ALIM(2)=ALIM(6)-.5*(ALIM(9)+ALIM(10))
0013      ALIM(3)=ALIM(7)-.5*(ALIM(11)+ALIM(12))
0014      ALIM(4)=ALIM(8)-.5*(ALIM(11)+ALIM(12))
C * T1, T2 - ПЕРИОДЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ
0015      T1=ALIM(6)-ALIM(5)
0016      T2=ALIM(8)-ALIM(7)
C * ФОРМИРОВАНИЕ НАЧАЛ МАССИВОВ
0017      NAR=1
0018      NQU=N1*N2
0019      NAI=NAR+NQU
0020      NW1=NAI+NQU
0021      NW2=NW1+N1
0022      NZI=NW2+N2
0023      NUR=NZI+NQU
0024      NUI=NUR+NQU
0025      NMAX=NUI+NQU
C * КОНТРОЛЬ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0026      IF(NMAX-1.GT.NU) GOTO 64
0027      IF(IP.EQ.-1) GOTO 101

```

```

C * ЗАДАНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ
0028     CALL PTICR1(U0,U0,U(NUR),NQU,0.)
0029     CALL PTICR2(U(NUI),0.,NQU)
0030     101 CONTINUE
C * СОБСТВЕННО РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ
0031     CALL PTIKR3(AK,U(NAR),U(NAI),Z,U(NZI),
      *U(NUR),U(NUI),U(NW1),U(NW2),N1,N2,
      *ALPHA,ALIM,AN,OM,T1,T2,DSQRT(DL),
      *DSQRT(HH),IF,EPRO,IQ,IMAX,IERR)
0032     GOTO 999
0033     64 CONTINUE
C * НЕ ХВАТАЕТ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0034     IERR=64
0035     GOTO 999
C * ВХОД PTITRE ПРЕДНАЗНАЧЕН
C * ДЛЯ ПОВТОРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
C * С ТЕМИ ЖЕ ЯДРОМ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ
0036     ENTRY PTITRE
0037     IP=-1
0038     GOTO 100
0039     999 CONTINUE
0040     RETURN
0041     END

0001     SUBROUTINE PTIKR3(AK,ARE,AIM,ZRE,ZIM,
      *URE,UIM,W1,W2,N1,N2,ALP,ALIM,BETA,RO,
      *T1,T2,DEL,HH,IPAR,EPRO,IQ,IMAX,IERR)
0002     IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003     INTEGER I,IERR,IMAX,IPAR,IQ,J,M,N,N1,N2
0004     REAL*8 AB,AIM,ALIM,ALP,ARE,ARG1,ARG2,
      *A0,A1,A2,BA,BETA,C1,C2,C3,DEL,DQ,DR,
      *EPRO,F1,F2,F3,HA,HH,H1,H2,P,RO,
      *R0,R1,SSI,T1,T2,UIM,URE,U2,
      *W1,W2,X,ZIM,ZNOR,ZRE,ZZ
0005     DIMENSION ARE(N1,N2),ZRE(N1,N2),
      *URE(N1,N2),AIM(N1,N2),ZIM(N1,N2),
      *UIM(N1,N2),W1(N1),W2(N2),ALIM(12)
0006     H1=T1/N1
0007     H2=T2/N2
0008     HA=H1/N1*H2/N2
C * ПРОВЕРЯЕМ, ПЕРВЫЙ ЛИ ВХОД
0009     IF(IPAR.EQ.-1) GOTO 2
C * ЗАДАНИЕ ЯДРА УРАВНЕНИЯ
0010     DO 1 I=1,N1
0011     DO 1 J=1,N2
0012     ARG1=(I-N1/2-1)*H1+
      +0.5*(ALIM(9)+ALIM(10))
0013     ARG2=(J-N2/2-1)*H2+
      +0.5*(ALIM(11)+ALIM(12))
0014     ARE(I,J)=AK(ARG1,ARG2)*H1*H2
0015     AIM(I,J)=0.
0016     IF(ARG1.LT.ALIM(9).OR.ARG1.GT.ALIM(10).
      .OR.ARG2.LT.ALIM(11).OR.ARG2.GT.ALIM(12))
      *
      ARE(I,J)=0.

```

```

0017          W1(I)=(2.0/H1*
*           DSIN(3.14159265359D0/N1*(I-1)))*2
0018          W2(J)=(2.0/H2*
*           DSIN(3.14159265359D0/N2*(J-1)))*2
0019          1 CONTINUE
0020          P=1.0
0021          C * ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ЯДРА И ПРАВОЙ ЧАСТИ
0022          CALL FTFTC(ARE, AIM, N1, N2, P)
0023          P=1.0
0024          CALL FTFTC(URE, UIM, N1, N2, P)
0025          2 CONTINUE
0026          C * ПОДБИРАЕМ ALP ТАК, ЧТО RO(ALP) > 0
0027          IQ=0
0028          77 CONTINUE
0029          IQ=IQ+1
0030          C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК
0031          F1=0.
0032          F2=0.
0033          DO 44 M=1, N1
0034          DO 44 N=1, N2
0035          U2=URE(M, N)**2+UIM(M, N)**2
0036          A2=ARE(M, N)**2+AIM(M, N)**2
0037          X=1.+(W1(M)+W2(N))**2
0038          IF(A2.EQ.0.) GOTO 42
0039          BA=X/(A2+ALP*X)
0040          AB=1.-ALP*BA
0041          C1=HA*U2*(BA*ALP)**2
0042          C2=HA*U2*AB*BA
0043          F1=F1+C1
0044          F2=F2+C2
0045          GOTO 44
0046          42 F1=F1+HA*U2
0047          44 CONTINUE
0048          C * ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ НЕВЯЗКИ
0049          C * ДЛЯ ПРОВЕРКИ RO(ALP)>0
0050          BETA=F1
0051          RO=F1-(DEL+HN*DSQRT(F2))**2
0052          C * ЕСЛИ ЗАДАНО EPRO=0, ТО КОНЧАЕМ
0053          IF(EPRO.EQ.0.) GOTO 10
0054          C * ЕСЛИ ЗАДАНО ALP=0.0, ТО КОНЧАЕМ
0055          IF(ALP.EQ.0.) GOTO 68
0056          IF(RO.GT.0.) GOTO 33
0057          C * ПЕРЕХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ РЕШЕНИЯ,
0058          C * ЕСЛИ НЕ УДАЛОСЬ ПОДОБРАТЬ ALP ТАКОЕ,
0059          C * ЧТО RO(ALP) > 0
0060          IF(IQ.GT.IMAX) GOTO 65
0061          ALP=2.*ALP
0062          GOTO 77
0063          C * НАЧАЛО ПОИСКА КОРНЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА
0064          33 CONTINUE
0065          IQ=0
0066          3 CONTINUE
0067          IQ=IQ+1
0068          C * БЛОК ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕВЯЗОК
0069          F1=0.

```

```

0058          F2=0.
0059          F3=0.
0060          DO 4 M=1,N1
0061          DO 4 N=1,N2
0062          U2=URE(M,N)**2+UIM(M,N)**2
0063          A2=ARE(M,N)**2+AIM(M,N)**2
0064          X=1.+(W1(M)+W2(N))**2
0065          IF(A2.EQ.0.) GOTO 41
0066          BA=X/(A2+ALP*X)
0067          AB=1.-ALP*BA
0068          C1=HA*U2*(BA*ALP)**2
0069          C2=HA*U2*AB*BA
0070          C3=2.*C1*AB
0071          F1=F1+C1
0072          F2=F2+C2
0073          F3=F3+C3
0074          GOTO 4
0075          41 F1=F1+HA*U2
0076          4 CONTINUE
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗКИ -БЕТА,
C * НОРМЫ РЕШЕНИЯ В W21 -ZNOR,
C * ОБОБЩЕННОЙ НЕВЯЗКИ -RO
C * И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ- DR
0077          BETA=F1
0078          ZNOR=DSQRT(F2)
0079          RO=БЕТА-(DEL+HN*ZNOR)**2
0080          IF(ALP.EQ.0.) GOTO 68
0081          DR=-F3*ALP-(DEL+HN*ZNOR)*HN*F3/ZNOR
C * ПЕРЕХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ РЕШЕНИЯ,
C * ЕСЛИ ТОЧНОСТЬ ДОСТИГНУТА
0082          IF(DABS(RO).LT.EPRO) GOTO 10
C * ПЕРЕХОД НА МЕТОД ХОРД,
C * ЕСЛИ ОБОБЩЕННАЯ НЕВЯЗКА НЕ ВЫПУКЛА
0083          IF(RO.LT.0.) GOTO 61
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НОВОГО АРГУМЕНТА
C * ПО МЕТОДУ НЬЮТОНА
C * И ПЕРЕХОД К СЛЕДУЮЩЕМУ ШАГУ
0084          DQ=-RO/DR
0085          A1=ALP
0086          R1=RO
0087          ALP=1./(1./ALP+DQ)
0088          IF(IQ.GE.IMAX) GOTO 66
0089          GOTO 3
C * МЕТОД ХОРД
0090          61 CONTINUE
C * ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛА ПРИ R0<0
0091          6 CONTINUE
0092          A0=ALP
0093          R0=RO
0094          7 CONTINUE
0095          IQ=IQ+1
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НОВОГО АРГУМЕНТА
C * ПО МЕТОДУ ХОРД
0096          ALP=A0*A1*(R0-R1)/(A0*R0-A1*R1)
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК
0097          F1=0.

```



```

0098      F2=0.
0099      DO 9 M=1,N1
0100      DO 9 N=1,N2
0101      U2=URE(M,N)**2+UIM(M,N)**2
0102      A2=ARE(M,N)**2+AIM(M,N)**2
0103      X=1.+(W1(M)+W2(N))**2
0104      IF(A2.EQ.0.) GOTO 91
0105      BA=X/(A2+ALP*X)
0106      AB=1.-ALP*BA
0107      C1=HA*U2*(BA*ALP)**2
0108      C2=HA*U2*AB*BA
0109      F1=F1+C1
0110      F2=F2+C2
0111      GOTO 9
0112      91 F1=F1+HA*U2
0113      9 CONTINUE
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗКИ, ОБОБЩЕННОЙ НЕВЯЗКИ
C * И НОРМЫ РЕШЕНИЯ
0114      BETA=F1
0115      ZNOR=DSQRT(F2)
0116      RO=BETA-(DEL+HN*ZNOR)**2
0117      IF(ALP.EQ.0.) GOTO 68
C * ПЕРЕХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ РЕШЕНИЯ,
C * КОГДА ТОЧНОСТЬ ДОСТИГНУТА
0118      IF(DABS(RO).LT.EPRO) GOTO 11
0119      IF(IQ.EQ.IMAX) GOTO 67
0120      IF(RO.LT.0.) GOTO 6
C * ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛА, КОГДА RO>0
0121      A1=ALP
0122      R1=RO
0123      GOTO 7
0124      65 CONTINUE
C * НЕ УДАЛОСЬ ПОДОБРАТЬ ALP ТАК,
C * ЧТО RO(ALP) БОЛЬШЕ НУЛЯ
0125      IERR=65
0126      GOTO 999
0127      66 CONTINUE
C * СДЕЛАНО IMAХ ИТЕРАЦИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА
0128      IERR=66
0129      GOTO 999
0130      67 CONTINUE
C * СДЕЛАНО IMAХ ИТЕРАЦИЙ,
C * ПРИМЕНЯЛСЯ МЕТОД ХОРД
0131      IERR=67
0132      GOTO 999
0133      68 CONTINUE
C * ЗАДАНО ИЛИ ПОЛУЧИЛОСЬ ALP=0.0
0134      IERR=68
0135      GOTO 999
0136      11 CONTINUE
C * РЕШЕНИЕ НАЙДЕНО МЕТОДОМ ХОРД
0137      IERR=1
0138      GOTO 999
0139      10 CONTINUE
C * НОРМАЛЬНОЕ ОКОНЧАНИЕ
0140      IERR=0

```

```

Ø141      999  CONTINUE
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ
Ø142      SSI=1.Ø
Ø143      DO 12 M=1,N1
Ø144      SSI=-SSI
Ø145      DO 12 N=1,N2
Ø146      SSI=-SSI
Ø147      ZZ=N1*N2*(ARE(M,N)**2+AIM(M,N)**2+
+ALP*(1.Ø+(W1(M)+W2(N))**2))
Ø148      IF(ZZ.NE.Ø.) GOTO 111
Ø149      ZRE(M,N)=Ø.
Ø150      ZIM(M,N)=Ø.
Ø151      GOTO 12
Ø152      111  ZRE(M,N)=SSI*(ARE(M,N)*URE(M,N)+
+AIM(M,N)*UIM(M,N))/ZZ
Ø153      ZIM(M,N)=SSI*(ARE(M,N)*UIM(M,N)-
- AIM(M,N)*URE(M,N))/ZZ
Ø154      12  CONTINUE
C * ОБРАТНОЕ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ
Ø155      P=-1.Ø
Ø156      CALL FTFTC(ZRE,ZIM,N1,N2,P)
Ø157      RETURN
Ø158      END

```

```

ØØØ1      SUBROUTINE FTFTC(ARE,AIM,N1,N2,P)
C * ПРОГРАММА БЫСТРОГО ДВУМЕРНОГО
C * ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ,
C * ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ НАХОДИТСЯ
C * В ARE(N1,N2), А МНИМАЯ - В AIM(N1,N2).
C * ЕСЛИ P > Ø, ТО ПРОИЗВОДИТСЯ ПРЯМОЕ,
C * А ЕСЛИ P < Ø - ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.
C * РЕЗУЛЬТАТ ОСТАЕТСЯ НА МЕСТЕ МАССИВОВ
C * ARE И AIM. РАЗМЕРНОСТИ МАССИВОВ N1 И N2
C * ДОЛЖНЫ БЫТЬ ЦЕЛЫМИ СТЕПЕНЯМИ ДВОЙКИ.
C * ПАРАМЕТР P НЕ СОХРАНЯЕТСЯ.
ØØØ2      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
ØØØ3      INTEGER I,J,N1,N2
ØØØ4      REAL*8 ARE,AIM,P
ØØØ5      DIMENSION ARE(N1,N2),AIM(N1,N2)
ØØØ6      DO 1 I=1,N1
ØØØ7      CALL FTF1C(ARE,AIM,N1*N2,I,N1,P)
ØØØ8      1  CONTINUE
ØØØ9      DO 2 J=1,N2
ØØ10      CALL FTF1C(ARE(1,J),AIM(1,J),N1,1,1,P)
ØØ11      2  CONTINUE
ØØ12      RETURN
ØØ13      END

```

```

ØØØ1      SUBROUTINE FTF1C(XARE,XAIM,N,IN,K,P)
ØØØ2      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
ØØØ3      INTEGER N,IN,K,I,II,J,II,MM,N1,N2

```

```

0004      REAL*8  XARE(N) , XAIM(N)
0005      N1=N/2
0006      MM=N1/2
0007      N2=N1+K
0008      J=IN
0009      JJ=J
0010      1      J=J+K
0011          IF(J-N1)2,2,10
0012      2      II=JJ+N1
0013          R=XARE(J)
0014          XARE(J)=XARE(II)
0015          XARE(II)=R
0016          R=XAIM(J)
0017          XAIM(J)=XAIM(II)
0018          XAIM(II)=R
0019          J=J+K
0020          M=MM
0021      3      IF(JJ-M)5,5,4
0022      4      JJ=JJ-M
0023          M=M/2
0024          GOTO 3
0025      5      JJ=JJ+M
0026          IF(JJ-J)1,1,6
0027      6      R=XARE(J)
0028          XARE(J)=XARE(JJ)
0029          XARE(JJ)=R
0030          R=XAIM(J)
0031          XAIM(J)=XAIM(JJ)
0032          XAIM(JJ)=R
0033          I=J+N2
0034          II=JJ+N2
0035          R=XARE(I)
0036          XARE(I)=XARE(II)
0037          XARE(II)=R
0038          R=XAIM(I)
0039          XAIM(I)=XAIM(II)
0040          XAIM(II)=R
0041          GOTO 1
0042      10     I=K
0043          T=3.14159265359
0044          IF(P)13,17,11
0045      11     T=-T
0046      13     P=-T
0047      14     SI=0.
0048          CO=1.
0049          S=DSIN(T)
0050          C=DCOS(T)
0051          T=0.5*T
0052          II=I
0053          I=I+I
0054          DO 16 M=IN,II,K
0055          DO 15 J=M,N,I
0056          JJ=J+II
0057          A=XARE(JJ)
0058          B=XAIM(JJ)
0059          R=A*CO-B*SI

```

```

0060      XARE(JJ)=XARE(J)-R
0061      XARE(J)=XARE(J)+R
0062      R=B*CO+A*SI
0063      XAIM(JJ)=XAIM(J)-R
0064      15  XAIM(J)=XAIM(J)+R
0065      R=C*CO-S*SI
0066      SI=C*SI+S*CO
0067      16  CO=R
0068      IF(I-N)14,17,17
0069      17  RETURN
0070      END

```

**VI. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма  
I-го рода на множествах монотонных и (или) выпуклых функций.  
Метод условного градиента**

```

0001      SUBROUTINE PTIGR(АК, U0, X1, X2, Y1, Y2, N, M,
      * Z, AN2, ITER, DL, IМАХ, C1, C2, IC, R, NR, IERR)
C * РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО
C * РОДА МЕТОДОМ УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА
C * ДИСПЕТЧЕР МЕТОДА
C * АК - ПОДПРОГРАММА-ФУНКЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЯДРА
C * ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ
C * ИМЯ          ДЛИНА          СОДЕРЖАНИЕ
C * А:          N*M          МАТРИЦА ОПЕРАТОРА
C * Н:          N          НАПРАВЛЕНИЕ СПУСКА
C * G:          N          ГРАДИЕНТ
C * U:          M          ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА
C * U1:         M          РАБОЧИЙ МАССИВ
C *
C * NR=N*M+2(N+M)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
0003      REAL*8 U0, Z, R, АК
0004      REAL*8 X1, X2, Y1, Y2, DL, C1, C2, AN2
0005      INTEGER IМАХ, IC, NR, ITER, IERR, N, M
0006      INTEGER NA, NH, NG, NU, NU1, NMAX
0007      EXTERNAL PTICR0, PTIGR1
0008      DIMENSION U0(M), Z(N), R(NR)
C * ФОРМИРУЕМ НАЧАЛА МАССИВОВ
0009      NA=1
0010      NH=N*M+1
0011      NG=NH+N
0012      NU=NG+N
0013      NU1=NU+M
0014      NMAX=NU1+M
0015      IF(NMAX-1.GT.NR)GOTO 64
C * ФОРМИРУЕМ МАТРИЦУ ОПЕРАТОРА
0016      CALL PTICR0(АК, R(NA), X1, X2, Y1, Y2, N, M)
C * МИНИМИЗАЦИЯ НЕВЯЗКИ
0017      CALL PTIGR1(R(NA), Z, U0, C1, C2, IC, N, M,
      * ITER, DL*(M-1.)/(Y2-Y1), 0., IМАХ, AN2,
      * Z, R(NU), R(NU1), R(NH), R(NG), IERR)
0018      AN2=AN2*(Y2-Y1)/(M-1.)
0019      GOTO 999
0020      64  CONTINUE

```

```

C * НЕ ХВАТАЕТ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0021      IERR=64
0022      GOTO 999
0023      999 CONTINUE
0024      RETURN
0025      END

0001      SUBROUTINE PTIGR1 (H,Z0,U0,C1,C2,IC,N,M,
      *ITER,DL2,ANGRD,IMAX,AN2,
      *Z,U,U1,H,G,IERR)
C * МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА МИНИМИЗАЦИИ
C * ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ
C * A(M,N) - МАТРИЦА ОПЕРАТОРА
C * Z0(N) - НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C * U0(M) - ПРАВAYA ЧАСТЬ
C * C1,C2 - КОНСТАНТЫ, ОГРАНИЧИВАЮЩИЕ РЕШЕНИЕ
C * IC - ПАРАМЕТР,
C *      ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ МНОЖЕСТВО КОРРЕКТНОСТИ
C * ITER - КОЛИЧЕСТВО СДЕЛАННЫХ ИТЕРАЦИЙ
C * DL2 - УРОВЕНЬ ВЫХОДА ПО НЕВЯЗКЕ
C * ANGRD - УРОВЕНЬ ВЫХОДА ПО НОРМЕ ГРАДИЕНТА
C * IMAX - МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ
C * Z(N) - ПРИВЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ
C * U(M) - ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА НА НЕМ
C * AN2 - ЗНАЧЕНИЕ НЕВЯЗКИ НА НЕМ
C * G(N),H(N) - РАБОЧИЕ МАССИВЫ
C * U1(M) - РАБОЧИЙ МАССИВ
C *      ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 A,Z0,U0,U1,U,G,H,Z,C1,C2
0004      REAL*8 ALMAX,AN2,AN20,DL2,ANGR,ANGRD
0005      INTEGER IC,N,M,ITER,IMAX,IED,IERR
0006      EXTERNAL PTIGR2,PTICR1,PTICR3
0007      EXTERNAL PTICR5,PTICR4,PTICR6
0008      DIMENSION U1(M),U(M),G(N),H(N),Z(N)
0009      DIMENSION A(1,N),Z0(N),U0(M)
0010      ITER=0
0011      ALMAX=1.
0012      CALL PTICR1(Z0,Z0,Z,N,0.)
0013      CALL PTICR3(A,Z,U,N,M)
0014      CALL PTICR5(U,U0,M,AN20)
0015      CALL PTICR4(G,U,U0,A,N,M)
0016      CALL PTICR6(G,G,N,ANGR)
0017      IF (AN20.LE.DL2.OR.ANGR.LE.ANGRD.OR.
      .ITER.GE.IMAX)GOTO 20
C * НАЧАЛО ИТЕРАЦИЙ
0018      14 CONTINUE
0019      ITER=ITER+1
0020      CALL PTIGR2(H,G,N,C1,C2,IC)
0021      CALL PTICR1(Z,H,H,N,-1.)
0022      CALL PTICR0(A,Z,G,U1,H,ALMAX,AL,
      *N,M,0.,0,IED)
0023      CALL PTICR1(Z,H,Z,N,-AL)
0024      CALL PTICR3(A,Z,U,N,M)

```

```

0025      CALL PTICR4(G,U,U0,A,N,M)
0026      CALL PTICR6(G,G,N,ANGR)
0027      CALL PTICR5(U,U0,M,AN2)
0028      IF(AN2.LE.DL2.OR.ANGR.LE.ANGRD.OR.
      .ITER.GE.IMAX)GOTO 20
0029      IF(AN2.GE.AN20)GOTO 21
      C * ЗАПОМИНАЕМ НЕВЯЗКУ
0030      AN20=AN2
0031      GOTO 14
0032      20  CONTINUE
      C * НОРМАЛЬНОЕ ОКОНЧАНИЕ
0033      IERR=0
0034      GOTO 999
0035      21  CONTINUE
      C * НЕВЯЗКА НЕ УМЕНЬШИЛАСЬ. НЕФАТАЛЬНО .
0036      IERR=1
0037      999  CONTINUE
0038      RETURN
0039      END

```

```

0001      SUBROUTINE PTIGR2(TOP,G,N,C1,C2,IC)
      C * ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕРШИНЫ
      C * G - МАССИВ, ГРАДИЕНТ
      C * TOP - МАССИВ, НАЙДЕННАЯ ВЕРШИНА
      C * C1,C2 - КОНСТАНТЫ, ОГРАНИЧИВАЮЩИЕ РЕШЕНИЕ
      C * IC=1 - МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ
      C * IC=2 - МОНОТОННЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ
      C * IC=3 - ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ
      C * IC=-1,C1=0. - ФУНКЦИИ С ВАРИАЦИЕЙ,
      C *      ОГРАНИЧЕННОЙ 2*C2
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 TOP,G
0004      REAL*8 C1,C2,AL,S1,S2,SS,SG,A,B
0005      INTEGER N,IC,ICM,K,K1,I
0006      EXTERNAL IABS,PTICR1,PTICR2
0007      DIMENSION TOP(N),G(N)
0008      AL=0.
0009      S1=0.
0010      S2=0.
0011      B=1./(N-1.)
0012      A=1.-B
0013      SS=+1.
      C * В K1 - НОМЕР ЛУЧШЕЙ
      C * К НАСТОЯЩЕМУ ВРЕМЕНИ ВЕРШИНЫ
0014      K1=0
0015      ICM=IABS(IC)
0016      IF(ICM.EQ.1)GOTO 101
0017      DO 1 I=2,N
0018      S2=S2+G(I)*A
0019      1  A=A-B
      C * В S2 - ЗНАЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА
      C * БЕЗ УЧЕТА ЛЕВОЙ ТОЧКИ
0020      101 CONTINUE

```

```

0021          DO 2 K=1,N
0022          SG=S1+S2+G(K)
C * SG - ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА
0023          IF(AL.LE.SG)GOTO 3
0024          AL=SG
0025          K1=K
0026          SS=+1.
0027          3   CONTINUE
0028          IF(IC.GE.0)GOTO 8
C * ПРОВЕРЯЕМ СИММЕТРИЧНУЮ ВЕРШИНУ,
C * ЕСЛИ НУЖНО (IC<0)
0029          IF(AL.LE.-SG)GOTO 4
0030          AL=-SG
0031          K1=K
0032          SS=-1.
C * SS=-1 - ПРИЗНАК ТОГО,
C * ЧТО ВЫБРАНА СИММЕТРИЧНАЯ ВЕРШИНА
0033          4   CONTINUE
0034          8   CONTINUE
C * В S1 - ЛЕВАЯ ПОЛОВИНА ФУНКЦИОНАЛА
C * А В S2 - ПРАВАЯ
0035          IF(ICM.EQ.1.OR.ICM.EQ.2)S1=S1+G(K)
0036          IF(ICM.EQ.3)S1=(S1+G(K))*(K-1.)/K
0037          IF(K.GE.N-1.OR.ICM.EQ.1)GOTO 7
0038          S2=S2*(N-K)/(N-K-1.)-G(K+1)
0039          GOTO 6
0040          7   S2=0.
0041          6   CONTINUE
0042          2   CONTINUE
C * НОМЕР ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕРШИНЫ НАЙДЕН - K1
C * ФОРМИРУЕМ ЭТУ ВЕРШИНУ
0043          IF(K1.NE.0)GOTO 9
0044          CALL PTICR2(TOP,C1,N)
0045          GOTO 999
0046          9   CONTINUE
0047          DO 5 I=1,N
0048          GOTO (801,802,803),ICM
0049          801 IF(I.LE.K1)TOP(I)=C2
0050          IF(I.GT.K1)TOP(I)=C1
0051          GOTO 5
0052          802 IF(I.LE.K1)TOP(I)=C2
0053          IF(I.GT.K1)
*           TOP(I)=TOP(I-1)-(C2-C1)/(N-K1)
0054          GOTO 5
0055          803 IF(I.LE.K1.AND.K1.NE.1)
*           TOP(I)=C1+(C2-C1)/(K1-1.)*(I-1.)*2.
0056          IF(I.GE.K1.AND.K1.NE.N)
*           TOP(I)=C1+(C2-C1)/(N-K1)*(N-I+0.)*2.
0057          5   CONTINUE
0058          IF(IC.GE.0)GOTO 999
0059          CALL PTICR1(TOP, TOP, TOP, N, SS-1.)
0060          GOTO 999
0061          999 CONTINUE
0062          RETURN
0063          END

```

**VII. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма  
1-го рода на множествах монотонных и (или) выпуклых функций.  
Метод проекции сопряженных градиентов**

```

0001      SUBROUTINE PTILR(AK,U0,X1,X2,Y1,Y2,N,M,
          *Z,AN2,DL,ITER,IMAX,C2,IC,R,NR,IERR)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 X1,X2,Y1,Y2,AN2,DL,C2,U0,Z,R,AK
0004      INTEGER N,M,IC,NR,IERR,NN,NA,NC,ND
0005      INTEGER INCON,NB,NMASK,NAJ,NP,NPI,NGR
0006      INTEGER NW,NP1,NMAX,IE,ICON,ITER,IMAX
0007      DIMENSION U0(M),Z(N),R(NR)
0008      EXTERNAL PTICR0,PTICR1,
          *PTILRA,PTILRB,PTILR1,PTILR2
C *      ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ
C ИМЯ ДЛИНА СОДЕРЖАНИЕ
C IM: 1 ЧИСЛО АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ
C      ДЛЯ PTILR1(PTILR2)
C A: N*M МАТРИЦА ОПЕРАТОРА
C C: N*N (C*X,X)
C D: N (D,X)
C CON: NN*N МАТРИЦА ОГРАНИЧЕНИЙ
C B: NN ВЕКТОР ОГРАНИЧЕНИЙ
C MASK: NN МАСКА АКТИВНОСТИ ОГРАНИЧЕНИЙ
C      (РАБОЧИЙ)
C AJ: NN*N МАТРИЦА АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ
C P: NN*N РАБОЧИЙ
C PI: N*N ПРОЕКТОР (РАБОЧИЙ)
C GR: N РАБОЧИЙ
C W: MAX(NN,N,M) РАБОЧИЙ
C P1: N РАБОЧИЙ
C *
C * NR>=3*N*M+3*N*N+8*N+MAX(M,N+1)+3
C *
C * ICONT - ПРИЗНАК ПРОДОЛЖЕНИЯ
C * ICONT=0 - БЕЗ ПРОДОЛЖЕНИЯ
C * ICONT=1 - ИДЕТ ПРОДОЛЖЕНИЕ
0009      ICONT=0
0010      101 CONTINUE
C * ЧИСЛО ОГРАНИЧЕНИЙ NN
0011      NN=N
0012      IF(IC.EQ.1)NN=N+1
C * ФОРМИРУЕМ НАЧАЛА МАССИВОВ
          NA=2
          NC=NA+N*M
          ND=NC+N*N
          NCON=ND+N
          NB=NCON+N*NN
          NMASK=NB+NN
          NAJ=NMASK+NN
          NP=NAJ+NN*N
          NPI=NP+NN*N
          NGR=NPI+N*N
          NW=NGR+N
          NP1=NW+MAX0(NN,M,N)
          NMAX=NP1+N

```



```

0026         IF(NMAX-1.GT.NR)GOTO 64
0027         IF(ICONT.EQ.1)GOTO 100
C * ЕСЛИ ICONT=1,
C * ТО ПЕРЕХОДИМ НА ВЫЗОВ ПРОДОЛЖЕНИЯ
C * В ПРОТИВОПОЛОЖНОМ СЛУЧАЕ
C * ФОРМИРУЕМ МАТРИЦУ ОПЕРАТОРА
0028         CALL PTICR0(AK,R(NA),X1,X2,Y1,Y2,N,M)
C * ПРЕОБРАЗУЕМ ФУНКЦИОНАЛ НЕВЯЗКИ
C * К ВИДУ (C*X,X)+(D,X)+E
0029         CALL PTILRA(R(NA),U0,R(NC),R(ND),N,M)
C * ФОРМИРУЕМ МАТРИЦУ ОГРАНИЧЕНИЙ
0030         CALL PTILRB(R(NCON),R(NB),N,NN,IC,C2,IE)
0031         IF(IE.NE.0)GOTO 65
C * МИНИМИЗИРУЕМ НЕВЯЗКУ
0032         CALL PTILR1(M,R,R(NMASK),R(NA),R(AJ),
          *R(NCON),R(NP),U0,R(NPI),R(NB),R(NGR),
          *R(NW),R(NP1),.TRUE.,IMAX,ITER,R(NC),Z,
          *0.,IERR)
0033         102 CONTINUE
0034         AN2=AN2*(Y2-Y1)/(M-1.)
0035         GOTO 999
0036         ENTRY PTILRE
C * ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ
0037         ICONT=1
0038         GOTO 101
0039         100 CONTINUE
C * ВЫЗОВ ПРОГРАММЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ
0040         CALL PTILR2(M,R,R(NMASK),R(NA),R(AJ),
          *R(NCON),R(NP),U0,R(NPI),R(NB),R(NGR),
          *R(NW),R(NP1),.TRUE.,IMAX,ITER,R(NC),Z,
          *R(ND),N,NN,AN2,DL*(M-1.)/(Y2-Y1),
          *0.,IERR)
0041         GOTO 102
0042         64 CONTINUE
C * НЕ ХВАТАЕТ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0043         IERR=64
0044         GOTO 999
0045         65 CONTINUE
C * НЕСУЩЕСТВУЮЩИЙ ВИД РАБОТЫ
0046         IERR=65
0047         GOTO 999
0048         999 CONTINUE
0049         RETURN
0050         END

```

```

0001         SUBROUTINE PTILR5(A,AJ,B1,MASK,N,M,NN,
          *GR,PI,P,P1,C,X,D,K,IED,DGR)
C * ПОДПРОГРАММА МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА
C * В ПРОСТРАНСТВЕ,ОПРЕДЕЛЯЕМОМ АКТИВНЫМИ
C * ОГРАНИЧЕНИЯМИ AJ, ИХ НОМЕРАВ MASK,
C * НАЧАЛЬНАЯ ТОЧКА X, КОНЕЧНАЯ В X,
C * ПРОЕКТОР НА ПОДПРОСТРАНСТВО В P1.
C * IED - КОД ОТВЕТА:0-НОВОЕ ОГРАН.,

```

```

C *      1-МИНИМУМ,2-ВЫХОД ПО НОРМЕ ГРАДИЕНТА
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 AJ,B1,GR,PI,P,P1,C,X,A,D,AN1,R,
      *DGR,AN,AN2,R1,R2,ALPHA,ALM,ALP
0004      INTEGER NP,MASK,NN,I,J,K,M,N,IED
0005      DIMENSION AJ(NN,N),B1(NN),MASK(NN),
      *GR(N),PI(N,N),P(N),P1(N),C(N,N),
      *X(N),A(NN,N),D(N)
0006      EXTERNAL PTICR1,PTICR2,
      *PTICR3,PTICR6,PTILR7
C * K - СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИЙ
C * В ДАННОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ.
0007      K=0
0008      AN1=1.
C * ПРИ K=0 СОПРЯЖ. ГРАДИЕНТ РАВЕН 0.
0009      CALL PTICR2(P,0.0,N)
C * ЦИКЛ ПО СОПРЯЖЕННЫМ ГРАДИЕНТАМ
C * И ПРОВЕРКА НА МИНИМУМ
C * ПО КОЛИЧЕСТВУ СДЕЛАННЫХ ШАГОВ.
0010      11 IF(K.EQ.N-M) GOTO 14
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ГРАДИЕНТ, ЕСЛИ ЕГО НОРМА < DGR,
C * ТО НА ВЫХОД.
0011      CALL PTILR7(X,C,N,GR,D)
0012      CALL PTICR6(GR,GR,N,R)
0013      IF(R.LT.DGR) GOTO 17
C * P1 - ПРОЕКЦИЯ АНТИГРАДИЕНТА
0014      CALL PTICR3(PI,GR,P1,N,N)
0015      CALL PTICR1(P1,P1,P1,N,-2.0)
C * AN - НОРМА ПРОЕКЦИИ,
C * AN2- КОЭФФИЦИЕНТ ДЛЯ ОЧЕРЕДНОГО СОП.НАПР.
0016      CALL PTICR6(P1,P1,N,AN)
0017      AN2=AN/AN1
C * P - НОВОЕ СОПРЯЖЕННОЕ НАПРАВЛЕНИЕ
0018      CALL PTICR1(P1,P,P,N,AN2)
C * R:=(P,GR)
0019      CALL PTICR6(P,GR,N,R)
C * R1:=(CP,P)
0020      R1=0.0
0021      DO 4 I=1,N
0022      R2=0.0
0023      DO 5 J=1,N
0024      R2=R2+C(I,J)*P(J)
0025      5 CONTINUE
0026      R1=R1+P(I)*R2
0027      4 CONTINUE
0028      IF(R1.EQ.0.0) GOTO 14
C * ОПТИМАЛЬНЫЙ ШАГ =-0.5R/R1
0029      ALPHA=-R/R1/2.
C * ИЩЕМ БЛИЖАЙШУЮ ПЛОСКОСТЬ
0030      ALM=ALPHA+1.0
0031      NP=0
0032      701 DO 6 I=1,NN
C * АКТИВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПРОВЕРЯТЬ НЕ НУЖНО
0033      IF(MASK(I).EQ.1) GOTO 6
0034      R=0.0
0035      R1=0.0

```

```

0036          DO 7 J=1,N
0037          R=R+A(I,J)*X(J)
0038          R1=R1+A(I,J)*P(J)
0039          7 CONTINUE
0040      C * R1 > 0 - НУЖНЫЙ ЛУЧ НА ПРЯМОЙ
          IF(R1.LE.0.0) GOTO 6
0041      C * ALP - РАССТОЯНИЕ ДО ПЛОСКОСТИ
          ALP=(B1(I)-R)/R1
0042      C * ИЩЕМ МИНИМАЛЬНОЕ
          IF(ALM.LE.ALP) GOTO 6
0043          ALM=ALP
0044      C * NP - НОМЕР ОГРАНИЧЕНИЯ
          NP=I
0045          6 CONTINUE
0046      C * ЕСЛИ ALPHA > ALM - ВЫШЛИ НА ОГРАНИЧЕНИЕ
          IF(ALPHA.GE.ALM) GOTO 12
0047      C * ЕСЛИ ALPHA < 0 - МИНИМУМ,
0048      C * ИНАЧЕ К СЛЕДУЮЩЕМУ ШАГУ
          IF(ALPHA.LE.0.0) GOTO 14
0049          CALL PTICR1(X,P,X,N,ALPHA)
0050          K=K+1
0051          AN1=AN
0052          GOTO 11
0053          12 ALPHA=ALM
0054      C * ПЕРЕШЛИ В НОВУЮ ТОЧКУ НА ГРАНИЦЕ
          CALL PTICR1(X,P,X,N,ALPHA)
0055      C * ВКЛЮЧИЛИ НОВОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ В МАСКУ
          MASK(NP)=1
0056          M=M+1
0057          IED=0
0058          GOTO 16
0059          14 IED=1
0060          GOTO 16
0061          17 CONTINUE
0062          IED=2
0063          16 CONTINUE
0064          RETURN
          END

```

```

0001      SUBROUTINE PTILR7(X,C,N,GR,D)
0002      C * ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАДИЕНТА
0003      C * ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА
          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0004          REAL*8 X,C,GR,D,R
0005          INTEGER N,I,J
          DIMENSION C(N,N),X(N),GR(N),D(N)
0006      C * GR:=2LX+D
          DO 1 I=1,N
0007          R=0.0
0008          DO 2 J=1,N
0009          R=R+(C(I,J)+C(J,I))*X(J)
0010          2 CONTINUE
0011          GR(I)=R+D(I)
0012          1 CONTINUE

```

0013 RETURN  
0014 END

```
0001 SUBROUTINE PTILR4(AJ,P,PI,M,N,NN)
C * ПОДПРОГРАММА ФОРМИРОВАНИЯ ПРОЕКТОРА
0002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003 REAL*8 AJ,P,PI,R
0004 INTEGER M,N,NN,I,J,K,L
0005 DIMENSION AJ(NN,N),P(NN,N),PI(1)
0006 EXTERNAL PTILR0,PTICR2
0007 IF(M.EQ.0) GOTO 1
C * PI:=AJ*AJ'
0008 DO 2 I=1,M
0009 DO 2 J=1,I
0010 R=0.0
0011 DO 3 K=1,N
0012 R=R+AJ(I,K)*AJ(J,K)
0013 3 CONTINUE
0014 L=M*(I-1)+J
0015 PI(L)=R
0016 L=M*(J-1)+I
0017 PI(L)=R
0018 2 CONTINUE
C * PI:=INV(PI)
0019 CALL PTILR0(PI,M)
C * P:=-PI*AJ
0020 DO 4 I=1,M
0021 DO 4 J=1,N
0022 R=0.0
0023 DO 5 K=1,M
0024 L=M*(I-1)+K
0025 R=R+PI(L)*AJ(K,J)
0026 5 CONTINUE
0027 P(I,J)=-R
0028 4 CONTINUE
C * PI:=AJ' *P
0029 DO 6 I=1,N
0030 DO 6 J=1,I
0031 R=0.0
0032 DO 7 K=1,M
0033 R=R+AJ(K,I)*P(K,J)
0034 7 CONTINUE
0035 L=N*(I-1)+J
0036 PI(L)=R
0037 L=N*(J-1)+I
0038 PI(L)=R
0039 6 CONTINUE
0040 GOTO 10
0041 1 CONTINUE
C * ЕСЛИ НЕТ АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ,
C * TO PI:=0, P:=0
0042 CALL PTICR2(PI,0.0,N*N)
0043 CALL PTICR2(P,0.0,N*NN)
C * PI:=E+PI
```

```

0044      10 DO 9 I=1,N
0045          L=N*(I-1)+I
0046          PI(L)=PI(L)+1.0
0047      9 CONTINUE
0048          RETURN
0049          END

```

```

0001      SUBROUTINE PTILR3(AJ,A,N,NN,MASK)
C * ПОДПРОГРАММА ФОРМИРОВАНИЯ
C * АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПО МАСКЕ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 AJ,A
0004      INTEGER N,NN,MASK,K,I,J
0005      DIMENSION AJ(NN,N),A(NN,N),MASK(NN)
0006      K=0
0007      DO 1 I=1,NN
0008          IF(MASK(I).EQ.0) GOTO 1
0009          K=K+1
0010          DO 2 J=1,N
0011              AJ(K,J)=A(I,J)
0012      2 CONTINUE
0013      1 CONTINUE
0014          RETURN
0015          END

```

```

0001      SUBROUTINE PTILR6(A,X,P,MASK,
*GR,N,M,NN,C,D,IED)
C * ПОДПРОГРАММА ВЫБРОСА ОГРАНИЧЕНИЙ
C * IED - КОД ОТВЕТА:
C *      0-НИЧЕГО НЕЛЬЗЯ ВЫБРОСИТЬ,
C *      1-ЧТО-ТО ВЫБРОСИЛИ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 A,X,P,GR,C,D,AL,R
0004      INTEGER MASK,N,M,NN,K,I,J,NNN,IED
0005      DIMENSION P(NN,N),GR(N),MASK(NN)
0006      DIMENSION A(NN,N),X(N),C(N,N),D(N)
0007      EXTERNAL PTILR7
0008      CALL PTILR7(X,C,N,GR,D)
0009      K=0
0010      IED=0
0011      AL=1.0
0012      DO 1 I=1,NN
0013          IF(MASK(I).EQ.0) GOTO 1
C * ДЛЯ АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ СЧИТАЕМ
C * ТЕНЕВОЙ ПАРАМЕТР
0014          K=K+1
0015          R=0.0
0016          DO 2 J=1,N
0017              R=R+P(K,J)*GR(J)
0018      2 CONTINUE
C * ИЩЕМ МИНИМАЛЬНЫЙ ТЕНЕВОЙ ПАРАМЕТР
0019          IF (R.GE.AL) GOTO 1

```

```

0020          AL=R
0021          NNN=I
0022          1 CONTINUE
C * ЕСЛИ ОН > 0, ТО ВСЕ,
C * ИНАЧЕ ВЫБРАСЫВАЕМ NNN-Е ОГРАНИЧЕНИЕ
0023          IF (AL.GE.0.0) GOTO 3
0024          MASK(NNN)=0
0025          IED=1
0026          M=M-1
0027          3 RETURN
0028          END

0001          SUBROUTINE PTILR1(MN,M,MASK,AQ,AJ,A,P,
          *U,PI,B,GR,W,P1,WORK,ICM,ICI,C,X,D,N,NN,
          *R,DEL,DGR,IEND)
C * ДИСПЕТЧЕР МЕТОДА
C * WORK=.TRUE.- РАБОТА С ЗАДАННОЙ МАТРИЦЕЙ А
C * ICI - СЧЕТЧИК БОЛЬШИХ ЦИКЛОВ
C * ICM - ОГРАНИЧИТЕЛЬ ЧИСЛА БОЛЬШИХ ЦИКЛОВ
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003          REAL*8 AQ,AJ,A,P,U,PI,B,GR,W,
          *P1,C,D,X,R,DEL,DGR
0004          INTEGER MN,M,MASK,N,NN,IEND,
          *I,ICI,ICM,IED
0005          DIMENSION A(NN,N),MASK(NN),AJ(NN,N),
          *P(NN,N),PI(N,N),B(NN),GR(N),W(MN),
          *P1(N),C(N,N),X(N),D(N),AQ(MN,N),U(MN)
0006          LOGICAL WORK
0007          EXTERNAL PTIC12,PTICR3,PTICR5,
          *PTILR3,PTILR4,PTILR5,PTILR6
0008          CALL PTIC12(MASK,0,NN)
C * M - ЧИСЛО АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ
0009          M=0
0010          ENTRY PTILR2
C * НАЧИНАЕМ ИТЕРАЦИИ БОЛЬШОГО ЦИКЛА
0011          ICI=0
0012          2 CONTINUE
0013          IF(ICI.EQ.ICM) GOTO 12
0014          ICI=ICI+1
0015          IF(.NOT.WORK) GOTO 101
C * ВЫЧИСЛЯЕМ НЕВЯЗКУ - R1, И ЕСЛИ ОНА < DEL,
C * ТО ВЫХОДИМ
0016          CALL PTICR3(AQ,X,W,N,MN)
0017          CALL PTICR5(W,U,MN,R1)
0018          101 CONTINUE
0019          IF(R1.LE.DEL) GOTO 9
C * ГОТОВИМ ОГРАНИЧЕНИЯ ПО МАСКЕ
0020          CALL PTILR3(AJ,A,N,NN,MASK)
C * ГОТОВИМ ПРОЕКТОР
0021          CALL PTILR4(AJ,P,PI,M,N,NN)
C * МИНИМИЗИРУЕМ НА ГРАНИ
0022          CALL PTILR5(A,AJ,B,MASK,N,M,NN,GR,
          *PI,W,P1,C,X,D,K,IED,DGR)
0023          IF(IED.EQ.0) GOTO 2

```

```

0024 C * ЕСЛИ НОРМА ГРАДИЕНТА < DGR, ТО ВЫХОДИМ
      IF(IED.EQ.2) GOTO 11
C * ПРОВЕРЯЕМ ОГРАНИЧЕНИЯ
0025 C * НА ВОЗМОЖНОСТЬ ВЫБРОСА И ИСКЛЮЧАЕМ
      CALL PTILR6(A,X,P,MASK
        *GR,N,M,NN,C,D,IED)
C * ЕСЛИ ЧТО-ТО ВЫБРОСИЛИ,
C * ТО ПРОДОЛЖАЕМ, ИНАЧЕ ВЫХОД
0026 IF(IED.EQ.1) GOTO 2
C * НОРМАЛЬНОЕ ОКОНЧАНИЕ. ТОЧНЫЙ МИНИМУМ
0027 IEND=0
0028 GOTO 10
0029 9 CONTINUE
C * НОРМАЛЬНОЕ ОКОНЧАНИЕ. ВЫХОД ПО НЕВЯЗКЕ
0030 IEND=1
0031 GOTO 10
0032 12 CONTINUE
C * ВЫХОД ПО ЧИСЛУ ИТЕРАЦИЙ
0033 IEND=3
0034 GOTO 10
0035 11 CONTINUE
C * ВЫХОД ПО НОРМЕ ГРАДИЕНТА
0036 IEND=2
0037 10 CONTINUE
0038 IF(.NOT.WORK)GOTO 102
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ
C * ДЛЯ ВЫДАЧИ
0039 CALL PTICR3(AQ,X,W,N,MN)
0040 CALL PTICR5(W,U,MN,R)
0041 102 CONTINUE
0042 RETURN
0043 END

0001 SUBROUTINE PTILRA(AQ,U,C,D,N,MN)
C * ПРИВЕДЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ
C * К ВИДУ (C*X,X)+(D,X)+E
0002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003 REAL*8 AQ,U,C,D,R
0004 INTEGER N,MN,I,J,K
0005 DIMENSION AQ(MN,N),U(MN),C(N,N),D(N)
C * D:=-2A'*U
0006 DO 6 I=1,N
0007 R=0.0
0008 DO 5 J=1,MN
0009 R=R+AQ(J,I)*U(J)
0010 5 CONTINUE
0011 D(I)=-2.0*R
0012 6 CONTINUE
C * L:=A'*A,
0013 DO 7 I=1,N
0014 DO 7 J=1,I
0015 R=0.0
0016 DO 8 K=1,MN
0017 R=R+AQ(K,I)*AQ(K,J)

```

```

0018      8 CONTINUE
0019      C(I,J)=R
0020      C(J,I)=R
0021      7 CONTINUE
0022      RETURN
0023      END

0001      SUBROUTINE PTILRB(A,B,N,NN,ITASK,C,IERR)
0002      C * ПРОГРАММА ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ ОГРАНИЧЕНИЙ
0003      IMPLICIT REAL*8(A-N,O-Z)
0004      REAL*8 A,B,C
0005      INTEGER N,NN,ITASK,IERR,L,I
0006      DIMENSION A(NN,N),B(NN)
0007      EXTERNAL PTICR2
0008      C * ЗАДАН НЕСУЩЕСТВУЮЩИЙ ТИП ОГРАНИЧЕНИЙ
0009      IERR=99
0010      IF(ITASK.GT.3.OR.ITASK.LT.1) GOTO 777
0011      C * НА МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЯХ
0012      C * КОНСТАНТА ОГРАНИЧЕНИЯ 0
0013      IERR=98
0014      IF(ITASK.EQ.1.AND.C.EQ.0.0) GOTO 777
0015      IERR=0
0016      C * ЗАНУЛЯЕМ МАТРИЦУ
0017      CALL PTICR2(A,0.0,N*NN)
0018      L=N-1
0019      C * ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ
0020      GOTO (1,2,3),ITASK
0021      1 CONTINUE
0022      C * НА МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЯХ
0023      DO 11 I=1,N
0024      A(I,I)=1.0
0025      A(I+1,I)=-1.0
0026      B(I+1)=0.0
0027      11 CONTINUE
0028      B(1)=C
0029      GOTO 777
0030      2 CONTINUE
0031      C * НА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ
0032      DO 12 I=2,L
0033      A(I,I)=-2.0
0034      A(I,I-1)=1.0
0035      A(I,I+1)=1.0
0036      B(I)=0.0
0037      12 CONTINUE
0038      A(1,1)=-1.0
0039      A(N,N)=-1.0
0040      B(1)=0.0
0041      B(N)=0.0
0042      GOTO 777
0043      3 CONTINUE
0044      C * НА МОНОТОННЫХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ
0045      DO 13 I=2,L
0046      A(I,I)=-2.0
0047      A(I,I-1)=1.0

```



```

0039         A(I,I+1)=1.0
0040         B(I)=0.0
0041     13    CONTINUE
0042         A(1,1)=-1.0
0043         A(1,2)=1.0
0044         A(N,N)=-1.0
0045         B(1)=0.0
0046         B(N)=0.0
0047     777    CONTINUE
0048         RETURN
0049         END

```

```

0001         SUBROUTINE PTILR0(A,N)
C * ОБРАЩЕНИЕ СИММЕТРИЧНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ
C * МАТРИЦЫ A(N,N) ПОРЯДКА N. РЕЗУЛЬТАТ
C * ПОМЕЩАЕТСЯ НА МЕСТО ИСХОДНОЙ МАТРИЦЫ.
C * МАТРИЦА A ДОЛЖНА ИМЕТЬ N+1 СТОЛБЦОВ
C * ( A(N,N+1) ), ПОСЛЕДНИЙ ИЗ КОТОРЫХ
C * ИСПОЛЬЗУЕТСЯ КАК РАБОЧИЙ МАССИВ.
C * ДОСТАТОЧНО ЗАДАВАТЬ ЛИШЬ ЭЛЕМЕНТЫ
C * ПОД ДИАГОНАЛЬЮ МАТРИЦЫ
C *         A(I,J), ГДЕ I>=J
0002         IMPLICIT REAL*8(A-N,O-Z)
0003         REAL*8 A,X,Y,Z
0004         INTEGER I,I1,I2,I3,J,J1,J2,J4,K,K1
0005         DIMENSION A(N,1)
0006         DO 1 I=1,N
0007             I1=I+1
0008             DO 1 J=I,N
0009                 J1=J+1
0010                 X=A(J,I)
0011                 I2=I-1
0012                 IF(I2.LT.1)GOTO 2
0013                 DO 3 K1=1,I2
0014                     K=I-K1
0015                     X=X-A(K,J1)*A(K,I1)
0016             3    CONTINUE
0017             2    CONTINUE
0018                 IF(J.NE.I) GOTO 4
0019                 Y=1./DSQRT(X)
0020                 A(I,I1)=Y
0021                 GOTO 1
0022             4    A(I,J1)=X*Y
0023             1    CONTINUE
0024                 DO 5 I=1,N
0025                     I3=I+1
0026                     IF(I3.GT.N)GOTO 5
0027                     DO 6 J=I3.N
0028                         Z=0.
0029                         J1=J+1
0030                         J2=J-1
0031                         DO 7 K1=I,J2
0032                             K=J-1-K1+I
0033             7    Z=Z-A(K,J1)*A(I,K+1)

```

```

0034          A(I,J1)=Z*A(J,J1)
0035          6 CONTINUE
0036          5 CONTINUE
0037          DO 8 I=1,N
0038          DO 8 J=I,N
0039          Z=0.
0040          J1=N+1
0041          J4=J+1
0042          DO 9 K=J4,J1
0043          9 Z=Z+A(J,K)*A(I,K)
0044          A(I,J+1)=Z
0045          8 CONTINUE
0046          DO 11 I=1,N
0047          DO 11 J=I,N
0048          A(J,I)=A(I,J+1)
0049          A(I,J)=A(I,J+1)
0050          11 CONTINUE
0051          RETURN
0052          END

```

**VIII. Программа решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множествах монотонных и (или) выпуклых функций. Метод проекций сопряженных градиентов на множество векторов с неотрицательными координатами**

```

0001          SUBROUTINE PTISR(AK,U0,X1,X2,Y1,Y2,N,M,
          *Z,AN2,ITER,DL,IMAX,IC,
          *R,NR,IERR)
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C * РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
C * ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА
C * МЕТОДОМ ПРОЕКЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
C * ДИСПЕТЧЕР МЕТОДА
C * АК - ПОДПРОГРАММА-ФУНКЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЯДРА
C * ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ
C *      ИМЯ          ДЛИНА          СОДЕРЖАНИЕ
C *      A:          N*M          МАТРИЦА ОПЕРАТОРА
C *      H:          N            НАПРАВЛЕНИЕ СПУСКА
C *      G:          N            ГРАДИЕНТ
C *      U:          M            ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА
C *      U1:         M            РАБОЧИЙ МАССИВ
C *      S:          N            РАБОЧИЙ МАССИВ
C *
C *      NR=N*M+3N+2M
0003          REAL*8 U0,Z,R,AK
0004          REAL*8 X1,X2,Y1,Y2,DL,AN2
0005          INTEGER IMAX,IC,NR,ITER,IERR,N,M
0006          INTEGER NA,NH,NG,NU,NU1,NS,NMAX,ICONT
0007          DIMENSION U0(M),Z(N),R(NR)
0008          EXTERNAL PTICR0,PTICR1,
          *PTISR1,PTISR2,PTISR3
0009          ICONT=0
C * ICONT - ПРИЗНАК РАБОТЫ С ПРОДОЛЖЕНИЕМ
C * ICONT=0 НАЧАЛО РАБОТЫ
C * ICONT=1 ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ

```

```

0010      100 CONTINUE
C * ФОРМИРОВАНИЕ НАЧАЛА МАССИВОВ
0011      NA=1
0012      NH=N*M+1
0013      NG=NH+N
0014      NU=NG+N
0015      NU1=NU+M
0016      NS=NU1+M
0017      NMAX=NS+N
0018      IF(NMAX-1.GT.NR)GOTO 64
0019      IF(ICONT.EQ.1)GOTO 101
C * ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА
0020      CALL PTICR0(AK,R(NA),X1,X2,Y1,Y2,N,M)
C * ПЕРЕХОДИМ В ПИ-ПЛЮС
0021      CALL PTISR2(R(NA),Z,N,M,IC,R(NS))
0022      CALL PTICR1(Z,Z,R(NH),N,0.)
0023      101 CONTINUE
C * МИНИМИЗАЦИЯ НЕВЯЗКИ
0024      CALL PTISR1(R(NA),R(NH),U0,N,M,ITER,
*DL*(M-1.)/(Y2-Y1),0.,IMAX,AN2,0.,0.,
*Z,R(NU),R(NU1),R(NH),R(NG),R(NS),IERR)
0025      AN2=AN2*(Y2-Y1)/(M-1.)
C * ВОЗВРАТ ИЗ ПИ-ПЛЮС
0026      CALL PTICR1(Z,Z,R(NH),N,0.)
0027      CALL PTISR3(Z,N,IC,R(NS))
0028      GOTO 999
0029      ENTRY PTISRE
C * ВХОД ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ МИНИМИЗАЦИИ
0030      ICONT=1
0031      64 CONTINUE
C * НЕ ХВАТАЕТ ДЛИНЫ РАБОЧЕГО МАССИВА
0032      IERR=64
0033      GOTO 999
0034      999 CONTINUE
0035      RETURN
0036      END

0001      SUBROUTINE PTISR1(A,Z0,U0,N,M,ITER,DL2,
*ANGRD,IMAX,AN2,ALF,RO,
*Z,U,U1,H,G,IPLUS,IERR)
C * МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ТИХОНОВА
C * МЕТОДОМ ПРОЕКЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
C * В ПЕРВОМ КВАДРАНТЕ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      INTEGER N,M,IMAX,IERR
0004      INTEGER IPLUS,ITERBN,IDIM,IDIMO,IPRIM
0005      INTEGER IEND,ITER,JCH,ICH,IED
0006      REAL*8 DL2,ANGRD,AN2,ALF,RO
0007      REAL*8 U0,Z0,Z,U,A,H,U1,G,AL,BT
0008      REAL*8 AS2,AS20,ANGRI,ANGRIO,ALMAX
0009      DIMENSION U0(M),Z0(N),Z(N),U(M),
*A(M,N),H(N),U1(M),G(N),IPLUS(N)
0010      EXTERNAL PTICR1,PTICR2,PTICR3
0011      EXTERNAL PTICR4,PTICR5,PTICR6

```

```

0012      EXTERNAL PTICR7,PTICR8,PTICR9
0013      ITERBN=0
0014      IEND=0
0015      ITER=0
0016      JCH=-1
0017      CALL PTICR1(Z0,Z0,Z,N,0.)
0018      CALL PTICR3(A,Z,U,N,M)
0019      CALL PTICR5(U,U0,M,AN2)
0020      CALL PTICR9(ASZ0,AN2,Z,N,ALF,RO)
0021      CALL PTICR4(G,U,U0,A,N,M)
0022      CALL PTICR8(G,Z,N,ALF,RO)
0023      CALL PTICR2(H,0.,N)
C * НАЧАЛО ИТЕРАЦИЙ
0024      14 CONTINUE
0025      ITER=ITER+1
0026      13 ICH=0
C * ICH - ПРИЗНАК ИЗМЕНЕНИЯ МНОЖЕСТВА
C * АКТИВН. ОГР. НА ПРЕДЫДУЩЕМ ШАГЕ
C * ICH=0 - НЕ ИЗМЕНИЛОСЬ
0027      IF(JCH) 1,2,3
0028      1 CALL PTICR2(IPLUS,1,N)
C * IPLUS(I)=0 - I-ОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ АКТИВНО
C * IPLUS(I)=1 - I-ОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ НЕ АКТИВНО
0029      DO 4 I=1,N
0030      IF(Z(I).GT.0..OR.G(I).LT..0)GOTO 5
0031      IPLUS(I)=0
0032      Z(I)=0.
0033      5 CONTINUE
0034      4 CONTINUE
C * МНОЖЕСТВО АКТ. ОГРАНИЧЕНИЙ СФОРМИРОВАНО
0035      IDIM=0
0036      DO 15 I=1,N
0037      15 IDIM=IDIM+IPLUS(I)
C * IDIM - РАЗМЕРНОСТЬ ТЕКУЩЕЙ ГРАНИ
0038      ICH=1
0039      GOTO 2
0040      3 CONTINUE
C * ДОБАВЛЯЕМ НОВОЕ АКТИВНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ
0041      IPLUS(IPRIM)=0
0042      Z(IPRIM)=0
0043      6 ICH=1
0044      IDIM=IDIM-1
0045      2 CONTINUE
0046      CALL PTICR7(G,G,IPLUS,N,ANGRI)
0047      ITERBN=ITERBN+1
C * ITERBN - СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИЙ НА ГРАНИ
0048      IF(ICH.EQ.1)ITERBN=1
0049      IF(ANGRI.GT.ANGRD.AND.ITERBN.NE.IDIM+1.
      .AND.IEND.NE.1)GOTO 7
0050      IF(IEND.EQ.1.AND.IDIM.EQ.IDIMO)GOTO 99
C * IEND=1 - ИДЕТ ПРОВЕРКА ДОСТИЖЕНИЯ
C * ТОЧНОГО МИНИМУМА
0051      IEND=1-IEND
0052      IDIMO=IDIM
0053      IF(IEND.EQ.0)GOTO 7
0054      JCH=-1

```

```

0055         GOTO 8
0056         7 CONTINUE
C * ФОРМИРОВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ СПУСКА - Н
0057         BT=0.
0058         IF(ICH.EQ.0)BT=ANGRI/ANGRID
C * ЗАПОМИНАЕМ НОРМУ ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА
0059         ANGRIO=ANGRI
0060         DO 9 I=1,N
0061         9 H(I)=(BT*H(I)+G(I))*IPLUS(I)
C * НАПРАВЛЕНИЕ СПУСКА СФОРМИРОВАНО
C * ***** ВНИМАНИЕ? МАШИННАЯ КОНСТАНТА
0062         ALMAX=1.E18
0063         IPRIM=0
0064         DO 10 I=1,N
0065         IF(H(I).LE..0)GOTO 11
0066         AL=Z(I)/H(I)
0067         IF(ALMAX.LT.AL)GOTO 12
0068         ALMAX=AL
0069         IPRIM=I
0070         12 CONTINUE
0071         11 CONTINUE
0072         10 CONTINUE
C * НАШЛИ МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНЫЙ ШАГ ALMAX
C * IPRIM - НОМЕР НОВОГО
C * ВОЗМОЖНОГО АКТИВНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ
0073         CALL PTICRO(A,Z,G,U1,H,
*ALMAX,AL,N,M,ALF,RO,IED)
0074         CALL PTICR1(Z,H,Z,N,-AL)
0075         CALL PTICR3(A,Z,U,N,M)
0076         CALL PTICR4(G,U,U0,A,N,M)
0077         CALL PTICR8(G,Z,N,ALF,RO)
0078         CALL PTICR7(G,G,IPLUS,N,ANGRI)
0079         CALL PTICR5(U,U0,M,AN2)
0080         CALL PTICR9(AS2,AN2,Z,N,ALF,RO)
0081         JCH=0
0082         IF(IED.EQ.1)JCH=1
C * IED=1 - ВЫШЛИ НА НОВОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ
0083         IF(IED.EQ.2)GOTO 22
0084         IF(AN2.LE.DL2.OR.ITER.GE.IMAX)GOTO 20
0085         IF(AS2.GE.AS20)GOTO 21
0086         AS20=AS2
0087         GOTO 14
0088         20 CONTINUE
C * ВЫХОД ПО НЕВЯЗКЕ ИЛИ ЧИСЛУ ИТЕРАЦИЙ
0089         IERR=1
0090         GOTO 999
0091         99 CONTINUE
C * НАШЛИ ТОЧНЫЙ МИНИМУМ.
C * НОРМАЛЬНОЕ ОКОНЧАНИЕ
0092         IERR=0
0093         GOTO 999
0094         8 CONTINUE
C * ВОЗВРАЩАЕМСЯ НА НАЧАЛО
C * ДЛЯ ПРОВЕРКИ ТОЧНОГО МИНИМУМА
0095         GOTO 13
0096         21 CONTINUE

```

```

C * НЕВЯЗКА НЕ УМЕНЬШИЛАСЬ. НЕФАТАЛЬНО ?
0097      IERR=2
0098      GOTO 999
0099      22  CONTINUE
C * ШАГ ОТРИЦАТЕЛЕН
C * ОШИБКА ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ
0100      IERR=65
0101      GOTO 999
0102      999 CONTINUE
0103      RETURN
0104      END

0001      SUBROUTINE PTISR2(A,Z,N,M,IC,S)
C * ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА A(M,N)
C * И НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ Z
C * ПРИ ПЕРЕХОДЕ В ПЕРВЫЙ КВАДРАНТ
C * S(N) - РАБОЧИЙ
C * IC - МНОЖЕСТВО КОРРЕКТНОСТИ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-N,O-Z)
0003      REAL*8 A,Z,S,T
0004      INTEGER N,M,IC,IC1,N1,I,J,K
0005      DIMENSION A(M,N),Z(N),S(N)
0006      EXTERNAL PTICR1,PTISR4
0007      IC1=IABS(IC)+1
0008      N1=N-1
0009      GOTO (800,801,802,803,804,805),IC1
0010      800 CONTINUE
C * НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ.
C * НИЧЕГО ДЕЛАТЬ НЕ НАДО
0011      GOTO 999
C * ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ - Z
0012      801 CONTINUE
C * МОНОТОННЫЕ, IC=1
0013      DO 101 I=2,N
0014      101  S(I-1)=Z(I-1)-Z(I)
0015      S(N)=Z(N)
0016      GOTO 799
0017      802 CONTINUE
C * МОНОТОННО УБЫВАЮЩИЕ, ВЫПУКЛЫЕ ВВЕРХ IC=2
0018      DO 102 I=2,N1
0019      102  S(I)=(I-N)*(Z(I-1)-2.*Z(I)+Z(I+1))
0020      S(N)=Z(N)
0021      S(1)=(Z(1)-Z(2))*(N-1.)
0022      GOTO 799
0023      803 CONTINUE
C * ВЫПУКЛЫЕ ВВЕРХ IC=3
0024      DO 103 I=2,N1
0025      103  S(I)=(Z(I-1)-2.*Z(I)+
+Z(I+1))*(N-I)*(I-1.)/(1.-N)
0026      S(N)=Z(N)
0027      S(1)=Z(1)
0028      GOTO 799
0029      804 CONTINUE
C * МОНОТОННО УБЫВАЮЩИЕ, ВЫПУКЛЫЕ ВНИЗ IC=4

```

```

0030      DO 104 I=2,N1
0031 104  S(I-1)=(Z(I-1)-2.*Z(I)+Z(I+1))*(I-0.)
0032      S(N1)=(Z(N1)-Z(N))*(N-1.)
0033      S(N)=Z(N)
0034      GOTO 799
0035 805  CONTINUE
C * ВЫПУКЛЫЕ ВНИЗ, ПОЛОЖ. НА КРАЯХ IC=5
0036      DO 105 I=2,N1
0037 105  S(I)=(Z(I-1)-2.*Z(I)+
      +Z(I+1))*(N-I)*(I-1.)/(N-1.)
0038      S(N)=Z(N)
0039      S(1)=Z(1)
0040      GOTO 799
0041 799  CONTINUE
0042      CALL PTICR1(S,S,Z,N,0.)
C * С НАЧАЛЬНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ КОНЧЕНО?
C * ПЕРЕФОРМИРОВАЕМ МАТРИЦУ А
0043      DO 1 K=1,M
C * ЗАПУЛЯЕМ МАССИВ S
0044      CALL PTICR2(S,0.,N)
0045      DO 2 J=1.N
0046      DO 3 I=1,N
C * ВЫЧИСЛЯЕМ ЭЛЕМЕНТ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА
0047      T=PTISR4(I,J,IC,N)
0048      3  S(J)=S(J)+A(K,I)*T
0049      2  CONTINUE
C * ПРЕОБРАЗОВАЛИ К-Ю СТРОКУ МАТРИЦЫ А.
C * ПЕРЕСЫЛАЕМ
0050      DO 4 J=1,N
0051      4  A(K,J)=S(J)
0052      1  CONTINUE
0053      999 CONTINUE
0054      RETURN
0055      END

```

```

0001      FUNCTION PTISR4(I,J,IC,N)
C * ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА
C * ИЗ ПИ-ПЛУС В КОМПАКТ,
C * ОПРЕДЕЛЯЕМЫЙ ПАРАМЕТРОМ IC
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 PTISR4,H
0004      INTEGER I,J,IC,IC1
0005      IC1=IABS(IC)+1
0006      GOTO (800,801,802,803,804,805),IC1
0007 800  CONTINUE
C * НЕОТРИЦ. - ТОЖДЕСТВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
0008      H=0.
0009      IF(I.EQ.J)H=1.
0010      GOTO 998
0011 801  CONTINUE
C * МОНОТОННО УБЫВАЮЩИЕ - IC=1
0012      H=0.
0013      IF(I.LE.J)H=1.
0014      GOTO 998

```

```

0015      802 CONTINUE
C * МОНОТОННО УБЫВАЮЩИЕ, ВЫПУКЛЫЕ ВВЕРХ IC=2
0016      H=1.
0017      IF(I.GT.J)H=(N-I)/(N-J+0.)
0018      GOTO 998
0019      803 CONTINUE
C * ВЫПУКЛЫЕ ВВЕРХ IC=3
0020      IF(I.LE.J.AND.J.NE.1)H=(I-1.)/(J-1.)
0021      IF(I.GE.J.AND.J.NE.N)H=(N-I)/(N-J+0.)
0022      GOTO 998
0023      804 CONTINUE
C * МОНОТОННО УБЫВАЮЩИЕ, ВЫПУКЛЫЕ ВНИЗ IC=4
0024      H=0.
0025      IF(I.LE.J.AND.J.NE.N)H=(J-I+1.)/(J+0.)
0026      IF(J.EQ.N)H=1.
0027      GOTO 998
0028      805 CONTINUE
C * ВЫПУКЛЫЕ ВНИЗ, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НА КРАЯХ IC=5
0029      IF(I.LE.J.AND.J.NE.1)H=(I-1.)/(J-1.)
0030      IF(I.GE.J.AND.J.NE.N)H=(N-I)/(N-J+0.)
0031      IF(J.NE.1.AND.J.NE.N)H=-H
0032      GOTO 998
0033      998 CONTINUE
0034      PTISR4=H
0035      RETURN
0036      END

```

```

0001      SUBROUTINE PTISR3(Z,N,IC,Y)
C * ПЕРЕХОД ИЗ ПИ-ПЛЮС В ПРОСТРАНСТВО,
C * ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ IC
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 Z,Y,S
0004      INTEGER N,IC,I,J
0005      DIMENSION Z(N),Y(N)
0006      EXTERNAL PTISR4,PTICR1
0007      DO 1 I=1,N
0008      S=0.
0009      DO 2 J=1,N
0010      2 S=S+Z(J)*PTISR4(I,J,IC,N)
0011      Y(I)=S
0012      1 CONTINUE
0013      CALL PTICR1(Y,Y,Z,N,0.)
0014      RETURN
0015      END

```

## IX. Общие программы

```

0001      SUBROUTINE PTICR0(AK,A,X1,X2,Y1,Y2,N,M)
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C * СВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
C * К ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ
C * AK(X,Y) - ПОДПРОГРАММА-ФУНКЦИЯ
C * ВЪЧИСЛЕНИЯ ЯДРА УРАВНЕНИЯ
C * X1,X2 - ПРЕДЕЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

```



```

C * Y1,Y2 - ПРЕДЕЛЫ ИЗМЕНЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ Y
C * N,M - ЧИСЛО ТОЧЕК ИНТЕГРИРОВАНИЯ
C *      И ИЗМЕНЕНИЯ Y
C * A(M,N) - ФОРМИРУЕМАЯ МАТРИЦА
C * ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДИТСЯ
C *      ПО ВТОРОЙ ПЕРЕМЕННОЙ АК(X,Y)
0003     REAL*8 H,X1,X2,Y1,Y2,X,Y,AK,A,PTICR0
0004     INTEGER I,J,N,M
0005     DIMENSION A(N,M)
0006     H=(X2-X1)/(N-1.)
0007     DO 1 I=1,N
0008     X=X1+(X2-X1)/(N-1.)*(I-1.)
0009     DO 2 J=1,M
0010     Y=Y1+(Y2-Y1)/(M-1.)*(J-1.)
0011     A(J,I)=AK(X,Y)*H
0012     IF(I.EQ.1.OR.I.EQ.N)A(J,I)=A(J,I)/2.
0013     2   CONTINUE
0014     1   CONTINUE
0015     RETURN
0016     END

```

```

0001     SUBROUTINE PTICR0(A,Z,G,U,H,ALM,AL,N,M,
*ALF,RO,IED)

```

```

C * ОДНОМЕРНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ
C *      СГЛАЖИВАЮЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА
C *      НА ЛУЧЕ Z-AL*N AL>0
C * A(M,N) - МАТРИЦА ОПЕРАТОРА
C * Z(N) - НАЧАЛЬНАЯ ТОЧКА
C * G(N) - ГРАДИЕНТ В ТОЧКЕ Z
C * H(N) - НАПРАВЛЕНИЕ СПУСКА
C * ALM - ОГРАНИЧЕНИЕ НА ШАГ AL<ALM
C * U(M) - РАБОЧИЙ МАССИВ
C * AL - НАЙДЕННЫЙ ШАГ
C * ALF - ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C * RO - ВЕС РАЗНОСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
C *      В НОРМЕ W21
C * IED - КОД ОТВЕТА:
C * 0 - НОРМ., 1- РАБОТАЕТ ОГРАНИЧЕНИЕ,
C * 2 - ШАГ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ
C * 3 - ДОЛЖНО ПРОИЗОЙТИ ДЕЛЕНИЕ НА НОЛЬ
0002     IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003     REAL*8 A,Z,G,U,H,PTICR0
0004     REAL*8 ALM,AL,S,GH,AN2,H2,ALF,RO
0005     INTEGER I,N,M,IED
0006     DIMENSION A(M,N),Z(N),G(N),U(M),H(N)
0007     EXTERNAL PTICR6,PTICR3
0008     H2=0.
0009     CALL PTICR6(G,H,N,GH)
0010     IF(GH.LT.0.)GOTO 2
0011     CALL PTICR3(A,H,U,N,M)
0012     CALL PTICR6(U,U,M,AN2)
0013     IF(ALF.EQ.0.)GOTO 3
0014     C * ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕ РАВЕН НУЛЮ
        DO 4 I=2,N

```

```

0015      4      H2=H2+(H(I)-H(I-1))*2*RO+H(I)**2
0016      H2=H2+H(1)**2
0017      3      CONTINUE
0018      IF(AH2+H2*ALF.EQ.0.0)GOTO 998
0019      AL=GH/(AH2+H2*ALF)*.5
0020      IF(AL.GC.ALM)GOTO 1
0021      IEO=0
0022      GOTO 999
0023      1      CONTINUE
C * РАБОТАЕТ ОГРАНИЧЕНИЕ НА ШАГ
0024      AL=ALM
0025      IEO=1
0026      GOTO 999
0027      2      CONTINUE
C * ШАГ ОТРИЦАТЕЛЕН ИЛИ НУЛЬ. ЗАНУЛЯЕМ ЕГО ?
0028      AL=0.
0029      IEO=2
0030      GOTO 999
0031      998 CONTINUE
C * ДЕЛЕНИЕ НА НОЛЬ. ПОЛАГАЕМ ШАГ РАВНЫМ НУЛЮ.
0032      IEO=3
0033      AL=0.
0034      GOTO 999
0035      999 CONTINUE
0036      RETURN
0037      END

```

```

0001      SUBROUTINE PTICR1(B,C,A,N,P)
C * ПЕРЕСЫЛКА МАССИВОВ
C * A(I):=B(I)+P*C(I), I=1,N
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 A,B,C,P,PTICR1
0004      INTEGER I,N
0005      DIMENSION A(N),B(N),C(N)
0006      DO 1 I=1,N
0007      1      A(I)=B(I)+P*C(I)
0008      RETURN
0009      END

```

```

0001      SUBROUTINE PTICR2(A,R,N)
C * ЗАСЫЛКА ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА R
C *      В МАССИВ А ДЛИНОЮ N
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 A,R,PTICR2
0004      INTEGER N,I
0005      DIMENSION A(N)
0006      DO 1 I=1,N
0007      1      A(I)=R
0008      RETURN
0009      END

```

```

0001          SUBROUTINE PTIC12(A,R,N)
C *   ЗАСЫЛКА ЦЕЛОГО ЧИСЛА R
C *   В МАССИВ А ДЛИНОЙ N
0002          REAL*8 PTIC12
0003          INTEGER N,I,R,A
0004          DIMENSION A(N)
0005          DO 1 I=1,N
0006      1      A(I)=R
0007          RETURN
0008          END

0001          SUBROUTINE PTICR3(A,Z,U,N,M)
C *   УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ А(М,N) НА ВЕКТОР Z(N)
C *   U(M) - ВЕКТОР РЕЗУЛЬТАТ
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003          REAL*8 U,A,Z,S,PTICR3
0004          INTEGER I,J,N,M
0005          DIMENSION U(M),A(M,N),Z(N)
0006          DO 1 I=1,M
0007      S=0.
0008          DO 2 J=1,N
0009      2      S=S+A(I,J)*Z(J)
0010      1      U(I)=S
0011          RETURN
0012          END

0001          SUBROUTINE PTICR4(G,U,U0,A,N,M)
C *   ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА НОРМЫ AZ-U0
C *   U=A*Z ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА НА ТОЧКЕ Z
C *   G(N) - РЕЗУЛЬТАТ
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003          REAL*8 G,U,U0,A,S,PTICR4
0004          INTEGER I,J,N,M
0005          DIMENSION G(N),U(M),U0(M),A(M,N)
0006          DO 1 J=1,N
0007      S=0.
0008          DO 2 I=1,M
0009      2      S=S+A(I,J)*(U(I)-U0(I))
0010      1      G(J)=S*2.
0011          RETURN
0012          END

0001          SUBROUTINE PTICR5(A,B,N,S)
C *   ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗКИ
C *   S - РЕЗУЛЬТАТ
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003          REAL*8 A,B,PTICR5
0004          REAL*8 S
0005          INTEGER I,N
0006          DIMENSION A(N),B(N)
0007          S=0.

```

```

0008      DO 1 I=1,N
0009      1   S=S+(A(I)-B(I))*2
0010      RETURN
0011      END

0001      SUBROUTINE PTICR6(A,B,N,S)
C * ВЪЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ А И В
C * S - РЕЗУЛЬТАТ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 A,B,S,PTICR6
0004      INTEGER I,N
0005      DIMENSION A(N),B(N)
0006      S=0.
0007      DO 1 I=1,N
0008      1   S=S+A(I)*B(I)
0009      RETURN
0010      END

0001      SUBROUTINE PTICR7(A,B,C,N,S)
C * ВЪЗВЕШЕННОЕ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ
C *      С ВЕСАМИ C(I)
C * ВЕКТОРОВ А И В ДЛИНОЮ N,
C * S - РЕЗУЛЬТАТ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 S,A,B,PTICR7
0004      INTEGER I,N,C
0005      DIMENSION A(N),B(N),C(N)
0006      S=0.
0007      DO 1 I=1,N
0008      1   S=S+A(I)*B(I)*C(I)
0009      RETURN
0010      END

0001      SUBROUTINE PTICR8(G,Z,N,ALF,RO)
C * ВЪЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА СТАБИЛИЗАТОРА
C *      С ВЕСОМ RO
C *      И ДОБАВЛЕНИЕ ЕГО К G(N)
C * Z(N) - ТОЧКА
C * ALF - ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003      REAL*8 ALF,Z,G,RO,PTICR8
0004      INTEGER I,N
0005      DIMENSION Z(N),G(N)
0006      IF(ALF.EQ.0.)GOTO 999
0007      DO 1 I=1,N
0008      G(I)=G(I)+2.*ALF*Z(I)
0009      IF(I.NE.1.AND.I.NE.N)G(I)=G(I)+
*2.*ALF*(2.*Z(I)-Z(I-1)-Z(I+1))*RO
0010      IF(I.EQ.1)
+      G(I)=G(I)+2.*ALF*(Z(1)-Z(2))*RO

```

```

0011         IF(I.EQ.N)
           +      G(I)=G(I)+2.*ALF*(Z(N)-Z(N-1))*RO
0012     1     CONTINUE
0013     999   CONTINUE
0014         RETURN
0015         END

```

```

0001         SUBROUTINE PTICR9(AS2,AN2,Z,N,ALF,RO)
C *  ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАБИЛИЗАТОРА
C *      И ДОБАВЛЕНИЕ ЕГО К AN2
C *  Z(N) - ТОЧКА
C *  ALF - ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C *  RO - ВЕС РАЗНОСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
C *      В НОРМЕ W21
C *  AS2 - РЕЗУЛЬТАТ
0002         IMPLICIT REAL*8(H,O-Z)
0003         INTEGER N
0004         REAL*8 AN2,AS2,ALF,Z(N),S,RO,PTICR9
0005         S=0.
0006         IF(ALF.EQ.0.)GOTO 999
0007         DO 4 I=2,N
0008     4     S=S+(Z(I)-Z(I-1))**2*RO+Z(I)**2
0009         S=S+Z(1)**2
0010     999   CONTINUE
0011         AS2=AN2+S*ALF
0012         RETURN
0013         END

```

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988.
2. Антонюк В.А., Рау Э.И., Савин Д.О. и др. Восстановление пространственного распределения двумерных микрополей методами реконструктивной вычислительной томографии // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1987. – Т. 51, № 3. – С. 475–479.
3. Арсенин В.Я., Иванов В.В. О решении некоторых интегральных уравнений 1-го рода типа свертки методом регуляризации // ЖВМиФ. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 310–321.
4. Арушанян О.Б. Дисциплина программирования на стандарте языка ФОРТРАН // Вопросы конструирования библиотек программ. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – С. 3–18.
5. Баев А.В. О выборе параметра регуляризации для операторов, заданных с погрешностью / МГУ. – М., 1976. – Деп. в ВИНТИ, № 493–76.
6. Баев А.В. О решении одной обратной задачи сейсмологии: – Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1977. – 165 с.
7. Баев А.В. О построении нормального решения нелинейных некорректных задач методом регуляризации // ЖВМиФ. – 1979. – Т. 19, № 3. – С. 594–600.
8. Бакушинский А.Б. Об одном численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // ЖВМиФ. – 1965. – Т. 5, № 4. – С. 744–749.
9. Бакушинский А.Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // ЖВМиФ. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–676.
10. Бакушинский А.Б. К распространению принципа невязки // ЖВМиФ. – 1970. – Т. 10, № 1. – С. 210–213.
11. Бакушинский А.Б. Регуляризирующие алгоритмы для решения некорректных экстремальных задач // Методы управления большими системами. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1970. – Т. 1. – С. 223–235.
12. Бакушинский А.Б. Замечания об одном классе регуляризирующих алгоритмов // ЖВМиФ. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1596–1598.
13. Бакушинский А.Б. К обоснованию принципа невязки // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1973. – С. 117–126.
14. Бакушинский А.Б. Регуляризирующий алгоритм на основе метода Ньютона – Канторовича для решения вариационных неравенств // ЖВМиФ. – 1976. – Т. 16, № 6. – С. 1397–1404.
15. Бакушинский А.Б. Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации // ЖВМиФ. – 1977. – Т. 17, № 6. – С. 1350–1362.
16. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итерационные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988.
17. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975.
18. Бисноватый-Козан Г.С., Гончарский А.В., Комберг Б.В. и др. Оптические характеристики аккреционного диска в системе Геркулеса (Геркулес X–1) // Астрон. журн. – 1977. – Т. 54, № 2. – С. 241–253.
19. Богданов М.Б. Нахождение распределения яркости по диску звезды из анализа

- фотометрических наблюдений ее покрытий Луной // *Астрон. журн.* – 1978. – Т. 55, № 3. – С. 490–495.
20. *Богданов М.Б.* Распределение яркости по диску углеродной звезды TX Рыб, полученное из анализа фотометрических наблюдений ее покрытий Луной // *Астрон. журн.* – 1979. – Т. 56, № 5. – С. 1023–1029.
  21. *Богданов М.Б.* О нахождении функции источника по наблюдению потемнения на краю звезды // *Астрон. журн.* – 1980. – Т. 57, № 2. – С. 296–301.
  22. *Богданов М.Б.* Применение метода регуляризации к анализу наблюдений покрытий Луной тесных двойных звезд и радиоисточников // *Астрон. журн.* – 1980. – Т. 57, № 4. – С. 762–766.
  23. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. – М.: Физматгиз, 1962.
  24. *Будак Б.М., Беркович Е.М.* Об аппроксимации экстремальных задач. 1 // *ЖВМиМФ.* – 1971. – Т. 11, № 3. – С. 580–596.
  25. *Будак Б.М., Беркович Е.М.* Об аппроксимации экстремальных задач. 2 // *ЖВМиМФ.* – 1971. – Т. 11, № 4. – С. 870–884.
  26. *Будак Б.М., Беркович Е.М., Гапоненко Ю.Л.* О построении сильно сходящейся минимизирующей последовательности для непрерывного выпуклого функционала // *ЖВМиМФ.* – 1969. – Т. 9, № 2. – С. 286–299.
  27. *Будак Б.М., Васильев Ф.П.* Приближенные методы решения задач оптимального управления. Вып. 2. – М.: ВЦ МГУ, 1969.
  28. *Будак Б.М., Виньоли А., Гапоненко Ю.Л.* Об одном способе регуляризации для непрерывного выпуклого функционала // *ЖВМиМФ.* – 1969. – Т. 9, № 5. – С. 1046–1056.
  29. *Вайнберг М.М.* Функциональный анализ. – М.: Просвещение, 1979.
  30. *Вайникко Г.М.* Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач // *АиТ.* – 1980. – № 3. – С. 84–92.
  31. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986.
  32. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.
  33. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.
  34. *Васин В.В., Татана В.П.* Приближенное решение операторных уравнений первого рода // *Матем. зап. Уральского ун-та.* – 1968. – Т. 6, тетр. 2. – С. 27–37.
  35. *Венцель Э.С., Кобылинский В.Г., Левин А.М.* Применение метода регуляризации для численного решения задачи изгиба тонких упругих пластинок // *ЖВМиМФ.* – 1984. – Т. 24, № 2. – С. 323–328.
  36. *Винокуров В.А.* О погрешности решения линейных операторных уравнений // *ЖВМиМФ.* – 1970. – Т. 10, № 4. – С. 830–839.
  37. *Винокуров В.А.* Общие свойства погрешности приближенного решения линейных функциональных уравнений // *ЖВМиМФ.* – 1971. – Т. 11, № 1. – С. 22–28.
  38. *Винокуров В.А.* Два замечания о выборе параметра регуляризации // *ЖВМиМФ.* – 1972. – Т. 12, № 2. – С. 481–483.
  39. *Винокуров В.А.* О порядке погрешности вычисления функции с приближенно заданным аргументом // *ЖВМиМФ.* – 1973. – Т. 13, № 5. – С. 1112–1123.
  40. *Воеводин В.В.* Численные методы линейной алгебры. – М.: Наука, 1966.
  41. *Воеводин В.В.* О методе регуляризации // *ЖВМиМФ.* – 1969. – Т. 9, № 3. – С. 671–673.
  42. *Гапоненко Ю.Л.* Метод последовательной аппроксимации для решения нелинейных экстремальных задач // *Изв. вузов. Математика.* – 1980. – № 5. – С. 12–16.
  43. Численные методы условной оптимизации / Под ред. Ф. Гилла, У Мюррея. – М.: Мир, 1977.
  44. *Гилязов С.Ф.* Об устойчивости решений линейных операторных уравнений 1-го рода методом наискорейшего спуска // *Вестн. МГУ. Сер. 15.* – 1980, № 3. – С. 26–32.
  45. *Гилязов С.Ф.* Методы решения линейных некорректных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1987.
  46. *Гласко В.Б., Гуцин Г.В., Старостенко В.И.* Метод регуляризации Тихонова при решении систем нелинейных уравнений // *ДАН УССР. Сер. Б.* – 1975, № 3. – С. 203–206.
  47. *Гласко В.Б., Гуцин Г.В., Старостенко В.И.* О применении метода регуляризации

- А.Н. Тихонова к решению нелинейных систем уравнений // ЖВМиМФ. – 1976. – Т. 16, № 2. – С. 283–292.
48. Гольдман Н.Л. Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода в классе кусочно-выпуклых функций с ограниченной первой производной // Численный анализ на Фортране. Методы и алгоритмы. – М.: МГУ, 1978. – С. 30–40.
  49. Гончарский А.В. Численные методы решения некорректных задач на компактных множествах // Всесоюз. конф. по некорректно поставленным задачам. – Фрунзе, 1979. – 47 с.
  50. Гончарский А.В. Обратные задачи оптики // Вестн. МГУ. Сер. 15. – 1986, № 3. – С. 59–77.
  51. Гончарский А.В. Некорректные задачи и методы их решения // Некорректные задачи естественности. – М.: МГУ, 1987.
  52. Гончарский А.В. Математические модели в задачах синтеза плоских оптических элементов // Компьютерная оптика. Вып. 1. – М.: МЦНТИ, 1987.
  53. Гончарский А.В., Гуцин Г.В., Ягола А.Г. Об одном численном эксперименте по решению двумерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // Некоторые вопросы автоматизированной обработки интерпретации физических экспериментов. Вып. 1. – М.: МГУ, 1973. – С. 192–201.
  54. Гончарский А.В., Гуцина Л.Г., Леонов А.С. и др. О некоторых алгоритмах отыскания приближенного решения некорректных задач на множестве монотонных функций // ЖВМиМФ. – 1972. – Т. 12, № 2. – С. 283–297.
  55. Гончарский А.В., Колтаков А.В., Степанов А.А. Обратные задачи вычислительной диагностики нарушенных поверхностных слоев кристаллов по рентгендифракционным данным // Поверхность. – 1986. – № 12. – С. 67–71.
  56. Гончарский А.В., Леонов А.В., Ягола А.Г. О решении двумерных уравнений Фредгольма 1-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов // ЖВМиМФ. – 1971. – Т. 11, № 5. – М 1296–1301.
  57. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Некоторое обобщение принципа для случая оператора, заданного с ошибкой // ДАН СССР. – 1972. – Т. 203, № 6. – С. 1238–1239.
  58. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Об одном регуляризирующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // ЖВМиМФ. – 1972. – Т. 12, № 6. – С. 1592–1594.
  59. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Обобщенный принцип невязки // ЖВМиМФ. – 1973. – Т. 13, № 2. – С. 294–302.
  60. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода типа свертки // Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов. Вып. 1. – М.: МГУ, 1973. – С. 170–191.
  61. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач // ЖВМиМФ. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 15–24.
  62. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. О принципе невязки при решении нелинейных некорректных задач // ДАН СССР. – 1974. – Т. 214, № 3. – С. 499–500.
  63. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. О решении некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // Тр. Всесоюз. школы молодых ученых "Методы решения некорректных задач и их применение". – М.: МГУ, 1974. – С. 39–43.
  64. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. О применимости принципа невязки в случае нелинейных некорректных задач и о новом регуляризирующем алгоритме их решения // ЖВМиМФ. – 1975. – Т. 15, № 2. – С. 290–297.
  65. Гончарский А.В., Степанов В.В. Алгоритмы приближенного решения некорректно поставленных задач на некоторых компактных множествах // ДАН СССР. – 1979. – Т. 245, № 6. – С. 1296–1299.
  66. Гончарский А.В., Степанов В.В. О равномерном приближении решения с ограниченной вариацией некорректных задач // ДАН СССР. – 1979. – Т. 248, № 1. – С. 20–22.
  67. Гончарский А.В., Степанов В.В. Численные методы решения некорректно поставленных задач на компактных множествах // Вестн. МГУ. Сер. 15. – 1980. – № 3. – С. 12–18.



68. Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи когерентной оптики. Фокусировка в линию // ЖВМиМФ. – 1986. – Т. 26, № 1. – С. 80–91.
69. Гончарский А.В., Тивков С.М., Хромов Г.С., Ягола А.Г. Исследование пространственной структуры планетарной туманности методом математического моделирования // Письма в Астрон. журн. – 1979. – Т. 5, № 8. – С. 406–410.
70. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Применение метода регуляризации для решения обратных задач астрофизики // Тр. Всесоюз. школы молодых ученых "Методы решения некорректных задач и их применение". – М.: МГУ, 1974. – С. 21–24.
71. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978.
72. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Физические характеристики звезд Вольфа–Райе и рентгеновских источников в тесных двойных системах // Всесоюз. конф. по некорректно поставленным задачам. Тез. докл. – Фрунзе, 1979. – С. 48.
73. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики. – М.: Наука, 1985. – 352 с.
74. Гончарский А.В., Ягола А.Г. О равномерном приближении монотонного решения некорректных задач // ДАН СССР. – 1969. – Т. 184, № 4. – С. 771–773.
75. Гончарский А.В., Ягола А.Г. О решении интегральных уравнений вида  $\int_a^b K(x, s) dg(s) = u(x)$  // ДАН СССР. – 1970. – Т. 193, № 2. – С. 266–267.
76. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. – Л.: ЛГУ, 1968.
77. Долгополова Т.Ф., Иванов В.К. О численном дифференцировании // ЖВМиМФ. – 1966. – Т. 6, № 3. – С. 570–575.
78. Домбровская И.Н. Об уравнениях первого рода с замкнутым оператором // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 6. – С. 39–72.
79. Домбровская И.Н., Иванов В.К. К теории некорректных линейных уравнений в абстрактных пространствах // Сиб. мат. журн. – 1965. – Т. 6, № 3. – С. 499–508.
80. Емелин И.В., Красносельский М.А. Правило остановки в итерационных процедурах решения некорректных задач // АИТ. – 1978, № 12. – С. 59–63.
81. Емелин И.В., Красносельский М.А. К теории некорректных задач // ДАН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
82. Заикин П.Н. О численном решении обратной задачи операционного исчисления в действительной области // ЖВМиМФ. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 411–415.
83. Иванов В.К. Теорема единственности обратной задачи логарифмического потенциала для звездных множеств // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 3. – С. 9–106.
84. Иванов В.К. Об устойчивости обратной задачи логарифмического потенциала для звездных множеств // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 4. – С. 96–99.
85. Иванов В.К. Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала // ДАН СССР. – 1962. – Т. 142, № 5. – С. 997–1000.
86. Иванов В.К. О линейных некорректных задачах // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 270–272.
87. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. – 1963. – Т. 61, № 2. – С. 211–223.
88. Иванов В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода // ЖВМиМФ. – 1966. – Т. 6, № 6. – С. 1089–1094.
89. Иванов В.К. Некорректные задачи в топологических пространствах // Сиб. мат. журн. – 1969. – Т. 10, № 5. – С. 1065–1074.
90. Иванов В.К., Васин В.В., Татана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978.
91. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1982.
92. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
93. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.

94. Каспаров К.Н., Леонов А.С. О фотоэмиссионном методе измерения спектров и новом способе их математической обработки // Журн. прикл. спектроскопии. – 1975. – Т. 22, № 3. – С. 491–498.
95. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. Наука, 1989.
96. Коротаев А.Л., Кузнецов П.И., Леонов А.С., Родоман В.Г. Об определении оптимального режима введения антибактериального препарата // АиТ. – 1986. – № 1. – С. 100–106.
97. Кочиков И.В., Кураמיшина Г.М., Понтин Ю.А., Ягола А.Г. Регуляризирующий алгоритм решения обратной колебательной задачи // ДАН СССР. – 1981. – Т. 261, № 5. – С. 1104–1106.
98. Кочиков И.В., Кураמיшина Г.М., Понтин Ю.А., Ягола А.Г. Расчет силовых полей многоатомных молекул методом регуляризации Тихонова // ДАН СССР. – 1985. – Т. 283, № 4. – С. 850–854.
99. Кочиков И.В., Кураמיшина Г.М., Ягола А.Г. Устойчивые численные методы решения некоторых обратных задач колебательной спектроскопии // ЖВМиМФ. – 1987. – Т. 27, № 11. – С. 350–357.
100. Кочиков И.В., Матвиенко А.Н., Ягола А.Г. Об одной модификации обобщенного принципа невязки // ЖВМиМФ. – 1983. – Т. 23, № 6. – С. 1298–1303.
101. Кочиков И.В., Матвиенко А.Н., Ягола А.Г. Обобщенный принцип невязки для решения несовместных уравнений // ЖВМиМФ. – 1984. – Т. 24, № 7. – С. 1087–1090.
102. Кочиков И.В., Матвиенко А.Н., Ягола А.Г. Метод регуляризации для решения несовместных нелинейных уравнений // ЖВМиМФ. – 1987. – Т. 27, № 3. – С. 456–458.
103. Кочиков И.В., Русов В.Д., Семенов М.Ю., Ягола А.Г. – Усиление слабых изображений в автордиографическом эксперименте // Интегральные уравнения в прикладном моделировании. Гл. 1. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1983. – С. 166–167.
104. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. – 1956. – Т. 20. – С. 819–842.
105. Лаврентьев М.М. К вопросу об обратной задаче теории потенциала // ДАН СССР. – 1956. – Т. 106, № 3. – С. 389–390.
106. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // ДАН СССР. – 1957. – Т. 112, № 2. – С. 195–197.
107. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 31–33.
108. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
109. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980.
110. Левин А.М. О регуляризации вычисления нижних граней функционалов // ЖВМиМФ. – 1984. – Т. 24, № 8. – С. 1123–1128.
111. Левин А.М. О вычислении меры несовместности операторных уравнений 1-го рода // ЖВМиМФ. – 1986. – Т. 26, № 4. – С. 499–507.
112. Леонов А.С. О построении устойчивых разностных схем решения нелинейных краевых задач // ДАН СССР. – 1975. – Т. 224, № 3. – С. 525–528.
113. Леонов А.С. Об устойчивом решении обратной задачи гравиметрии на классе выпуклых тел // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1976. – № 7. – С. 55–65.
114. Леонов А.С. Об алгоритмах приближенного решения нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором // ДАН СССР. – 1979. – Т. 245, № 2. – С. 300–304.
115. Леонов А.С. О выборе параметра регуляризации для нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором // ЖВМиМФ. – 1979. – Т. 19, № 6. – С. 1363–1376.
116. Леонов А.С. О связи метода обобщенной невязки и обобщенного принципа невязки для нелинейных некорректных задач // ЖВМиМФ. – 1982. – Т. 22, № 4. – С. 783–790.
117. Леонов А.С. О некоторых алгоритмах решения некорректных экстремальных задач // Мат. сб. – 1986. – Т. 129(171), № 2. – С. 218–231.

118. *Леонов А.С., Сулейманова М.С.* Способ обработки результатов динамических радионуклидных исследований на основе методов решения некорректных задач // *Мед. радиология.* – 1985. – № 12. – С. 60 – 63.
119. *Лисковец О.А.* Регуляризация уравнений с замкнутым линейным оператором // *ДАН БССР.* – 1971. – Т. 15, № 6. – С. 481 – 483.
120. *Лисковец О.А.* Оптимальные свойства принципа сглаживающего функционала // *ДАН СССР.* – 1977. – Т. 234, № 2. – С. 298 – 301.
121. *Лисковец О.А.* Проекционный способ реализации метода невязки нелинейных уравнений первого рода с возмущенным оператором // *Дифф. уравнения.* – 1980. – Т. 16, № 4. – С. 723 – 731.
122. *Лисковец О.А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. – Минск: Наука и техника, 1981.
123. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
124. *Мартынов Д.Я., Гончарский А.В., Черпащук А.М., Ягола А.Г.* Применение метода регуляризации к решению обратных задач астрофизики // *Проблемы математической физики и вычислительной математики.* М.: Наука, 1971. – С. 205 – 218.
125. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989.
126. *Мергелян С.Н.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // *УМН.* – 1956. – Т. 11, вып. 5. – С. 3 – 26.
127. *Морозов В.А.* О решении функциональных уравнений методом регуляризации // *ДАН СССР.* – 1966. – Т. 167, № 3. – С. 510 – 512.
128. *Морозов В.А.* О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // *ЖВМиМФ.* – 1966. – Т. 6, № 1. – С. 170 – 175.
129. *Морозов В.А.* О регуляризирующих семействах операторов // *Вычислительные методы и программирование.* Вып. 8. – М.: МГУ, 1967. – С. 63 – 93.
130. *Морозов В.А.* О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации // *ДАН СССР.* – 1967. – Т. 175, № 6. – С. 1225 – 1228.
131. *Морозов В.А.* О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // *ЖВМиМФ.* – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 295 – 309.
132. *Морозов В.А.* О регуляризации некоторых классов экстремальных задач // *Вычислительные методы и программирование.* Вып. 12. – М.: МГУ, 1969. – С. 24 – 37.
133. *Морозов В.А.* О задаче дифференцирования и некоторых алгоритмах приближения экспериментальной информации // *Вычислительные методы и программирование.* Вып. 14. – М.: МГУ, 1970. – С. 45 – 62.
134. *Морозов В.А.* Об одном новом подходе к решению линейных уравнений 1-го рода с приближенным оператором // *Тр. I конф. молодых ученых факультета ВМиК МГУ.* – М.: МГУ, 1973. – С. 22 – 28.
135. *Морозов В.А.* О принципе невязки при решении несовместных уравнений методом регуляризации А.Н. Тихонова // *ЖВМиМФ.* – 1973. – Т. 13, № 5. – С. 1099 – 1111.
136. *Морозов В.А., Гордонова В.И.* Численные алгоритмы выбора параметра в методе регуляризации // *ЖВМиМФ.* – 1973. – Т. 13, № 3. С. 539 – 545.
137. *Морозов В.А.* О вычислении нижних граней функционалов по приближенной информации // *ЖВМиМФ.* – 1973. – Т. 13, № 4. – С. 1045 – 1048.
138. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1987.
139. *Морозов В.А.* О принципе оптимальности невязки при приближенном решении уравнений с нелинейными операторами // *ЖВМиМФ.* – 1974. – Т. 14, № 4. – С. 819 – 827.
140. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения нелинейных операторных уравнений // *Изв. вузов. Математика.* – 1978. – Т. 11. – С. 74 – 86.
141. *Морозов В.А., Гольдман Н.Л., Самарин М.К.* Метод дескриптивной регуляризации и качество приближений // *Инж.-физ. журн.* – 1977. – Т. 33, № 6. – С. 1117 – 1124.
142. *Морозов В.А., Кирсанов Н.Н., Сысоев А.Ф.* Комплекс алгоритмов быстрого преобразования Фурье для дискретных рядов // *Численный анализ на Фортране.* – М.: МГУ, 1976.

143. *Перельман А.Я., Пукина В.А.* Применение свертки Меллина к решению интегральных уравнений 1-го рода с ядром, зависящим от произведения // ЖВМиМФ. – 1969. – Т. 9, № 3. – С. 626 – 646.
144. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1974.
145. *Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Итоги науки и техники. Мат. анализ. Т. 12. – М.: ВИНТИ, 1974.
146. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.
147. *Рапопорт И.М.* О плоской обратной задаче теории потенциала // ДАН СССР. – 1940. – Т. 28. – С. 305 – 307.
148. *Рапопорт И.М.* Об устойчивости в обратной задаче теории потенциала // ДАН СССР. – 1941. – Т. 31. – С. 303 – 305.
149. *Самарин М.К.* Об устойчивости решения некоторых некорректных задач на множествах специальной структуры: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – М., 1979.
150. *Самарин М.К.* Среднеквадратичная аппроксимация кусочно-монотонными функциями // Численный анализ на Фортране. Вып. 15. – М.: МГУ, 1976. – С. 83–90.
151. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
152. *Саульев В.К., Самойлов И.И.* Приближенные методы безусловной оптимизации функций многих переменных // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – М.: ВИНТИ, 1973. – Т. 11. – С. 91–128.
153. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Л.: ЛГУ, 1950.
154. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наук. думка, 1978.
155. *Степанов В.В.* Численное решение некорректно поставленных задач на множествах кусочно-монотонных и выпуклых функций // Вестн. МГУ. Сер. 15. – 1985, № 3. – С. 21–26.
156. *Страхов В.Н.* О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки. 1 // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967, № 4. – С. 36–54.
157. *Страхов В.Н.* О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки. 2 // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967, № 5. – С. 33–53.
158. *Страхов В.Н.* О численном решении некорректных задач, представляемых интегральными уравнениями типа свертки // ДАН СССР. – 1968. – Т. 178, № 2. – С. 299–302.
159. *Сыщиков Ю.Н., Вилков Л.В., Ягола А.Г.* Метод определения потенциальных функций внутреннего вращения по электронографическим данным // Вестн. МГУ. Химия. – 1983. – Т. 24, № 6. – С. 541–543.
160. *Танана В.П.* Некорректно поставленные задачи и геометрия банаховых пространств // ДАН СССР. – 1970. – Т. 193, № 1. – С. 43–45.
161. *Танана В.П.* Приближенное решение операторных уравнений первого рода и геометрические свойства банаховых пространств // Изв. вузов. Математика. – 1971, № 7. – С. 81–93.
162. *Танана В.П.* Об одном проекционно-итеративном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором // ДАН СССР. – 1975. – Т. 224, № 5. – С. 1028–1029.
163. *Танана В.П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
164. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
165. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и о методе регуляризации // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
166. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. – 1963. – Т. 153, № 1. – С. 49–52.
167. *Тихонов А.Н.* О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода // ДАН СССР. – 1964. – Т. 156, № 6. – С. 1296–1299.
168. *Тихонов А.Н.* О нелинейных уравнениях первого рода // ДАН СССР. – 1965. – Т. 161, № 5. – С. 1023–1026.
169. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМиМФ. – 1965. – Т. 5, № 4. – С. 718–722.

170. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивых методах их решения // ДАН СССР. – 1965. – Т. 163, № 3. – С. 591–594.
171. Тихонов А.Н. О некорректных задачах оптимального планирования и устойчивых методах их решения // ДАН СССР. – 1965. – Т. 164, № 3. – С. 507–510.
172. Тихонов А.Н. О некорректных задачах оптимального планирования // ЖВМиМФ. – 1966. – Т. 6, № 1. – С. 81–89.
173. Тихонов А.Н. Об устойчивости задач оптимизации функционалов // ЖВМиМФ. – 1966. – Т. 6, № 4. – С. 631–634.
174. Тихонов А.Н. Об одном принципе взаимности // ДАН СССР. – 1980. – Т. 253, № 2. – С. 305–308.
175. Тихонов А.Н. О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // ДАН СССР. – 1980. – Т. 254, № 3. – С. 549–554.
176. Тихонов А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // ЖВМиМФ. – 1980. – Т. 20, № 6. – С. 1373–1383.
177. Тихонов А.Н. О задачах с неточно заданной исходной информацией // ДАН СССР. – 1985. – Т. 280, № 3. – С. 559–563.
178. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
179. Тихонов А.Н., Васильев Ф.П. Методы решения некорректных экстремальных задач. – Wapach Centre Publ., 1976. – С. 297–342.
180. Тихонов А.Н., Галкин В.Я., Заикин П.Н. О прямых методах решения задач оптимального управления // ЖВМиМФ. – 1967. – Т. 7, № 2. – С. 416–423.
181. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // ЖВМиМФ. – 1964. – Т. 4, № 3. – С. 564–571.
182. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // ЖВМиМФ. – 1965. – Т. 5, № 5. – С. 463–473.
183. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Кочкиков И.В. и др. Вычислительная микротомография объектов в рентгеновской и оптической сканирующей микроскопии // ДАН СССР. – Т. 289, № 5. – С. 1104–1107.
184. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Кочкиков И.В. Некорректные задачи обработки изображений // ДАН СССР. – 1987. – Т. 294, № 4. – С. 832–837.
185. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983.
186. Тихонов А.Н., Карманов В.Г., Руднева Т.Л. Об устойчивости задач линейного программирования // Вычисл. методы и программирование. Вып. 12 – М.: МГУ, 1969. – С. 3–9.
187. Трушников В.Н. Об одном устойчивом нелинейном итерационном процессе // Изв. вузов. Математика. – 1979, № 5. – С. 58–62.
188. Трушников В.Н. Один нелинейный регуляризирующий алгоритм и некоторые его применения // ЖВМиМФ. – 1979. – Т. 19, № 4. – С. 822–829.
189. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976.
190. Федотов А.М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. – Новосибирск: Наука, 1982.
191. Фиакко А., Мак Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы безусловной последовательной оптимизации. – М.: Мир, 1972.
192. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.
193. Хуанг Т.С. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. – М.: Радио и связь, 1984.
194. Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г. Интерпретация узкополосных кривых блеска системы V 444 в континууме // Астрон. циркуляр. – 1967. – № 413. – С. 5 – 8.
195. Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г. Интерпретация затменных систем как обратная задача фотометрии // Астрон. журн. – 1967. – Т. 44, № 6. – С. 1239–1252.
196. Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г. Интерпретация кривых блеска затменных систем при условии монотонности искомым функций // Астрон. журн. – 1968. – Т. 45, № 6. – С. 1191–1206.

197. *Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г.* О стратификации излучения в оболочке затменно-двойной звезды типа Вольфа – Райе 444 Лебеда // *Астрон. журн.* – 1972. – Т. 49, № 3. – С. 533–543.
198. *Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г.* Алгоритм и программа для ЭВМ решений кривой блеска затменной системы, содержащей компоненту с протяженной атмосферой // *Переменные звезды.* – 1973. – Т. 18, № 6. – С. 535–569.
199. *Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г.* О решении кривых блеска затменных переменных звезд в классе монотонных функций // *Астрон. журн.* – 1974. – Т. 51, № 4. – С. 776–781.
200. *Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г.* Интерпретация кривых блеска затменных систем с дискообразными оболочками. Система HZ Геркулеса // *Астрон. журн.* – 1977. – Т. 54, № 5. – С. 1027–1035.
201. *Шолохович В.Ф.* Неустойчивые экстремальные задачи и геометрические свойства банаховых пространств // *ДАН СССР.* – 1970. – Т. 195, № 2. – С. 289–291.
202. *Ягола А.Г.* О выборе параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки // *ДАН СССР.* – 1979. – Т. 245, № 1. – С. 37–39.
203. *Ягола А.Г.* Обобщенный принцип невязки в рефлексивных пространствах // *ДАН СССР.* – 1979. – Т. 249, № 1. – С. 71–73.
204. *Ягола А.Г.* О решении нелинейных некорректных задач с помощью обобщенного метода невязки // *ДАН СССР.* – 1980. – Т. 252, № 4. – С. 810–813.
205. *Ягола А.Г.* О выборе параметра регуляризации при решении некорректных задач в рефлексивных пространствах // *ЖВМиФ.* – 1980. – Т. 20, № 3. – С. 586–596.
206. *Ягола А.Г.* Некорректно поставленные задачи с приближенно заданным оператором. – *Banach Centre Publ.* – 1984. – Т. 13. – С. 265–279.
207. *Cooley J., Tuckey J.* An algorithm for machine calculation of complex fourier series // *Math. of comput.* – 1965. – V. 19, № 90. – P. 297–301.
208. *Frank M., Wolfe P.* An algorithm for quadratic programming // *Naval Res., Los. Quart.* – 1956. – № 3. – P. 95–110.
209. *Furi M., Vignoli A.* On the regularization of nonlinear ill-posed problems in Banach spaces // *J. Optimiz. Theory and Appl.* – 1969. – V. 4, № 3. – P. 206–209.
210. *Gauss C.F.* *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.* Hambruge, 1809.
211. *Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Hohlova V.L., Yagola A.G.* The study of local characteristic of the Ap-stars Surfaces // *Publ. of the Czechoslovak Acad. of Sci., Prague.* – 1978. – № 54. – P. 36–37.
212. *Groetsch C.W.* *The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind.* – Boston: Pitman Publ. Ltd., 1984.
213. *Hadamard J.* *Le probleme de Cauchy et les equations aux derivers particlee lineaires. hyperbolique.* – Paris: Hermann, 1932.
214. *Hofman B.* *Regularization for applied on verse and ill-posed problems.* – Leipzig: BSB Teubner, 1986.
215. *John F.* A note on "improper" problems in partial differential equations//*Communs. Pure and Appl. Math.* – 1955. – V. 8. – P. 591–594.
216. *John F.* Continious dependence on data for solution with a prescribed bound//*Communs. Pure and Appl. Math.* – 1960. – V. 13, № 4. – P. 551–585.
217. *Legendre A.M.* *Novelles methodes pour la determination des orbites des cometes.* – Paris: Courcier, 1806.
218. *Phillips D.L.* A technique for numerical solution of certain integral equations of the first kind//*J. Assoc. Comput. Mach.* – 1962. – V. 9, № 1. – P. 84–97.
219. *Pucci C.* Sui problemi Cauchy non "ben posti"//*Atti Acad. Naz. Zincci. Rend. Cl. Sci. fis. mat. e natur.* – 1955. – V. 18, № 5. – P. 473–477.
220. *Pucci C.* Discussione del problema di Cauchy pur le equazioni di tipo elliptico//*Ann. mat. pura ad appl.* – 1958. – V. 46. – P. 131–154.

Научное издание

ТИХОНОВ Андрей Николаевич  
ГОНЧАРСКИЙ Александр Владимирович  
СТЕПАНОВ Владимир Вадимович  
ЯГОЛА Анатолий Григорьевич

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ**

Заведующий редакцией *Е.Ю. Ходан*  
Редакторы: *И.В. Викторенкова, М.В. Самсонова*  
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*  
Технические редакторы: *О.Б. Черняк, М.И. Мешкова*  
Корректоры: *Ю.В. Трушкова, Н.П. Круглова, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве  
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 32704

Сдано в набор 16.04.90. Подписано к печати 13.06.90  
Формат 60 X 90/16. Бумага книжно-журнальная  
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная  
Усл печ.л. 14,5. Усл.кр.-отт. 14,88. Уч.-изд.л. 15,23  
Тираж 9650 экз. Тип. зак. 187 Цена 2 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство "Наука"  
Главная редакция физико-математической литературы  
11 7071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства "Наука"  
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25